MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL

sep



seit

INDICE

UNIDAD 1. **LA INTEGRAL**

1.1 La diferencial 17

Interpretación geométrica de la diferencial 18

La diferencial como aproximación del incremento 19

Fórmulas fundamentales para determinar las diferenciales de funciones 22

1.2 La integral definida 27

La notación sigma 27

Propiedades de la notación sigma 28

Fórmulas de la notación sigma 28

Área bajo una curva 29

Suma de Riemann 35

Introducción a la definición de la integral de una función 38

Integral definida 38

Notación de Leibniz para la integral 39

La integral definida propia e impropia 39

1.3. Propiedades de la integral definida 45

Teoremas sobre las sumas de Riemann 45

Teoremas que dan lugar a las propiedades de la integral definida 45

Teorema del valor medio para integrales 50

Demostración del teorema del valor medio para integrales 54

Valor promedio 58

1.4. La integral indefinida 62

Teorema fundamental del cálculo 65

La integral indefinida 67

1.5 Aplicación de las cinco primeras fórmulas del formulario general de integrales inmediatas elementales ....
Integración ....
Comprobación de la integración indefinida ....
Fórmulas para integrales inmediatas elementales ....

1.6 Aplicación de las fórmulas 6 y 7 del formulario general de integrales inmediatas elementales ....

1.7 Aplicación de las fórmulas 8 y 17 del formulario general de integrales inmediatas elementales ....

1.8 Aplicación de las fórmulas 18 a la 24 del formulario general de integrales inmediatas elementales ....

UNIDAD 2. **MÉTODOS DE INTEGRACIÓN**

2.1 Solución de integrales indefinidas, reducibles a inmediatas por sustitución algebraica ....
Primer método ....
Segundo método ....

2.2 Solución de integrales indefinidas, reducibles a inmediatas por sustitución trigonométrica ....

2.3 Solución de integrales indefinidas por el método de integración por partes en sus diferentes casos ....
Integración por partes ....
Aplicaciones del método de integración por partes ....

2.4 Solución de integrales indefinidas por el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales ....
Integración de fracciones racionales ....

2.5 Solución de integrales indefinidas por el método de integración por sustitución de una nueva variable (método de integración por racionalización) 183
Introducción 183

UNIDAD 3. **INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

3.1 Integración de productos de potencias impares de senos y cosenos 193
3.2 Integración de productos de potencias pares de senos y cosenos (por medio de ángulos múltiplos) 201
Fórmulas trigonométricas por aplicar 201
3.3 Integración de productos de funciones seno y coseno con diferentes argumentos en la misma variable 213
Fórmulas trigonométricas por aplicar 213
Fórmulas de integración directa 213
a) Solución por sustitución trigonométrica 214
b) Solución por fórmula de integración directa 214
a) Solución por sustitución trigonométrica 215
b) Solución por fórmula de integración directa 215
a) Solución por sustitución trigonométrica 216
b) Solución por fórmula de integración directa 216
a) Solución por sustitución trigonométrica 217
b) Solución por fórmula de integración directa 217
Solución de integrales combinando los casos II y III (ejemplo) 217
3.4. Integración de potencias de la función tangente o cotangente 221
3.5. Integración de potencias de la función secante o cosecante 228
3.6. Integración de productos de potencias de tangentes y secantes o cotangentes y cosecantes 232

UNIDAD 4. **APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL**

4.1 Cálculo de la constante de integración ....
Determinación de la constante de integración por medio de condiciones iniciales ....
Determinación de la constante de integración por medio de su significado geométrico ....
Determinación de la constante de integración por medio de su significado físico ....

4.2 Cálculo de la integral definida ....
Diferencial del área bajo una curva ....
Teorema sobre la diferencial del área bajo una curva ....
La integral definida ....
Teorema sobre la integral definida ....
Cálculo de una integral definida ....
Cambio de límites correspondiente a un cambio de la variable ....

4.3 Cálculo del área bajo una curva dada ....
Cálculo del área cuando las ecuaciones de la curva se dan en forma paramétrica ....

4.4 Integración aproximada (fórmula de los trapecios y fórmula de Simpson) ....
Representación geométrica de una integral ....
Fórmula de los trapecios ....
Fórmula de Simpson o parabólica ....

4.5 Obtención de áreas planas por integración cuando la diferencial de área es una función cartesiana ....
Introducción ....
Significado del signo negativo delante de un área ....
Área limitada por dos curvas ....

Área limitada por dos curvas al intersecarse en más de dos puntos 299

4.6 Obtención de áreas planas por integración cuando la diferencial de área es una función polar 304

Introducción 304

4.7 Obtención de volúmenes de sólidos de revolución por integración 311

Introducción 311

Volumen de un sólido de revolución hueco 315

4.8 Obtención de volúmenes de sección transversal 320

Áreas de superficies de revolución 320

Volúmenes de sección transversal 325

4.9 Obtención de centros de gravedad de superficies planas 332

Momento para un sistema lineal 332

Momento para un sistema bidimensional 334

Momentos de una superficie 335

Centro de gravedad de un sólido de revolución 343

4.10 Cálculo de la presión ejercida por un fluido sobre superficies verticales 349

Introducción 349

4.11 Cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable 357

Trabajo realizado por una fuerza constante 357

Trabajo realizado por una fuerza variable 358

Trabajo de un gas al dilatarse 362

Dilatación isoterma 363

RESPUESTAS A ALGUNOS EJERCICIOS 369

UNIDAD 1 LA INTEGRAL

1.1 LA DIFERENCIAL

La notación para la derivada de la función $y = f(x)$ es:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

en donde el símbolo $\frac{dy}{dx}$ representa el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$.

Si la derivada de $f(x)$ es $f'(x)$ para un valor específico de variable independiente x y su incremento Δx, la diferencial de la función dada se denota con el símbolo $d\,f(x)$, y se define por la expresión:

$$\boldsymbol{d\,f(x) = f'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x}$$

Cuando $f(x) = x$, su derivada es $f'(x) = 1$. Sustituyendo en la expresión ①, resulta:

$$d(x) = (1)\Delta x$$

$\therefore\ \boldsymbol{dy = \Delta x}$ { *Diferencial de la variable independiente*

Si $y = f(x)$, al sustituirlo en la expresión ①, resulta:

$$\therefore\ \boldsymbol{dy = f'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x}$$

La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por el incremento o diferencial de la variable independiente (una derivada de una función en una variable es el límite del cociente del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero).

EJEMPLOS

1. Hallar la diferencial para la función $y = ax^3$.

Solución

$$\text{Si } y = ax^3$$

$$\therefore \boldsymbol{dy = 3ax^2dx}$$

2. Calcular la diferencial de la función $y = \sqrt{3x^2 - 11}$ para $x = 5$ y $\Delta x = dx = 0.05$.

Solución

$$\text{Si} \quad y = \sqrt{3x^2 - 11} \qquad dy = \frac{3(5)}{\sqrt{3(5)^2 - 11}}(0.05)$$

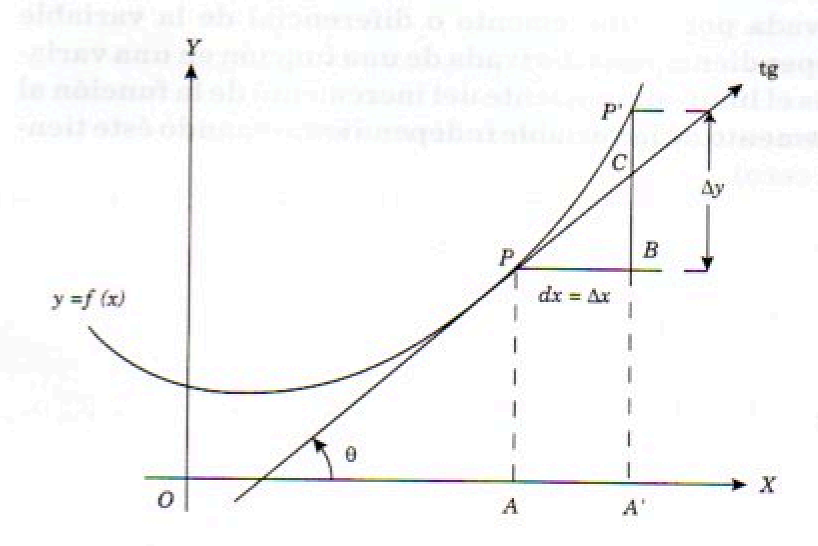
$$dy = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 11}}dx \qquad dy = \frac{15}{\sqrt{75 - 11}}(0.05)$$

$$dy = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 11}}dx \qquad dy = \frac{15}{8}(0.05)$$

$$\therefore \boldsymbol{dy = 0.09375}$$

Interpretación geométrica de la diferencial

Analizando el significado de diferencial, gráficamente tenemos:



Sea $y = f(x)$ la función dada y su diferencial (derivada) $f'(x)$, que se identifica como el valor de la derivada en P; si el incremento de la variable independiente $\Delta x = dx = PB$, con base en la definición de diferencial resulta:

$$y = f(x)$$
$$dy = f'(x)\ dx$$

Recordando que el valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto, tenemos:

$$dy = f'(x)\,dx$$
$$dy = \operatorname{tg}\theta = (PB)$$

Con base en la gráfica, tenemos que: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{BC}{PB}$ $\begin{matrix}\leftarrow \textit{Cateto opuesto} \\ \leftarrow \textit{Cateto adyacente}\end{matrix}$

Sustituyendo, se obtiene: $dy = \dfrac{BC}{PB}\,(PB)$

$\therefore\ \boldsymbol{dy = BC}$ $\left\{ \begin{matrix} \textit{Representa el incremento de la ordenada} \\ \textit{de la tg correspondiente a dx} \end{matrix} \right.$

Si dx representa un incremento cualquiera de la variable independiente x para un punto $P(x, y)$ de la curva $y = f(x)$, tiene por derivada $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg}\theta$.

Generalmente la diferencial de la función (dy) y el incremento (Δy) no son iguales; por ejemplo:

De la gráfica tenemos que:

$(dy) = BC$ { *Incremento de la ordenada de la tg en* P

$(dy) = BC$ { *Incremento de la ordenada de la función de* P *a* P'

La diferencial como aproximación del incremento

Si el incremento de la variable independiente dx es muy pequeño, entonces dy y Δy son aproximadamente iguales, es decir, según la gráfica anterior:

Si $dx = PB$ es muy pequeño, $dy = BC \approx \Delta y = BP'$

Cuando sólo es necesario obtener un valor aproximado del incremento de la función, calcular el valor de la diferencial será suficiente para resolver el problema.

EJEMPLOS

1. Calcular un valor aproximado para $\sqrt{27}$.

Solución

Sean $y = \sqrt{x}$ { *La función representativa de* $\sqrt{27}$

$x = 25$ { *Por ser un valor próximo al dado y que tiene raíz cuadrada exacta.*

$dx = \Delta x = 2$ { *Incremento de x para tener* $\sqrt{27}$

$$y = \sqrt{x}$$

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$dy = \frac{2}{2\sqrt{25}} = \frac{2}{10} = \mathbf{0.2}$$

Si $y = \sqrt{x} = \sqrt{25} = 5$

$$\sqrt{27} = y + dy$$

$$\sqrt{27} = 5 + 0.2$$

$$\therefore \sqrt{27} = \mathbf{5.2}$$

Si realmente la $\sqrt{27} = 5.196152$, el valor determinado es mayor que el real sólo 0.003848 unidades.

2. Calcular un valor aproximado de tg 47°, empleando diferenciales.

Solución

Sean $y = \text{tg}\, x$ { *La función representativa de tg 47°*

$x = 45°$ { *Por ser un valor próximo al dado ya que tg 45° = 1*

$dx = 2°$ { *Incremento de x para tener 47°*

$2° = 0.034906$ radianes

$$y = \text{tg}\, x$$

$$dy = \sec^2 x\, dx$$

$$dy = (\sec 45°)^2\,(0.034906)$$

$$dy = \left(\sqrt{2}\right)^2 (0.034906)$$

$$dy = 2\,(0.034906)$$

$$\therefore \mathbf{dy = 0.069812}$$

Si $y = \text{tg}\, 45° = 1$, tenemos

$$\text{tg}\, 47° = y + dy$$

$$\text{tg}\, 47° = 1 + 0.069812$$

$$\therefore \textbf{tg 47° = 1.069812 radianes}$$

Si realmente tg 47° = 1.0722368 radianes, el valor determinado es menor que el real en 0.002556 radianes.

3. Determinar el volumen aproximado de una concha esférica cuyo radio interior es de 10 cm y cuyo grosor es de 0.15625 cm.

Solución

Sean $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ — *La función que representa el volumen de una esfera*

$r = 10 \ cm$ — *Radio interior de la concha esférica*

$dr = \Delta r = 0.15625 \ cm$ — *Grosor de la concha esférica*

$dv = \Delta v$ — *Volumen aproximado de la concha esférica*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$dv = 4\pi r^2 dr$$
$$dv = 4\pi(10)^2(0.15625)$$

$\therefore$ $\boldsymbol{dv = 62.5\pi}$ $\quad$ $\therefore$ ***El volumen aproximado de la concha esférica es de $62.5\pi \ cm^3$.***

4. Determinar el incremento del área de un cuadrado de 6 pulgadas por lado, al aumentar el lado 1/32 de pulgada.

Solución

Sean $A = x^2$ — *La función que representa el área de un cuadrado*

$x = 6 \ pulgadas$ — *Longitud del lado de un cuadrado*

$dx = \Delta x = \frac{1}{32} \ pulgadas$ — *Aumento del lado del cuadrado*

$dA = \Delta A$ — *Incremento del área del cuadrado*

$$A = x^2$$
$$dA = 2x\,dx$$
$$dA = 2(6)\left(\frac{1}{32}\right)$$

$\therefore$ $\boldsymbol{dA = \frac{3}{8} = 0.375}$ $\quad$ $\therefore$ ***El incremento de área del cuadrado es de 0.375 pulgadas cuadradas.***

Fórmulas fundamentales para determinar las diferenciales de funciones

Las fórmulas fundamentales para hallar las diferenciales son las mismas fórmulas que empleamos para determinar las derivadas; tan sólo será necesario multiplicar cada una por dx:

1. $d(c) = 0$

2. $d(x) = dx$

3. $d(u + v - w) = du + dv - dw$

4. $d(c\,v) = c\,d\,v$

5. $d(u\,v) = u\,dv + v\,du$

5a. $d(u\,v\,w) = u\,v\,dw + uw\,dv + uw\,du$

6. $d\left(v^{n}\right) = nv^{\,n-1}\,dv$

6a. $d\left(x^{n}\right) = nx^{\,n-1}\,dx$

7. $d = \left(\dfrac{u}{v}\right) = \left(\dfrac{v\,du - u\,dv}{v^{2}}\right)$

7a. $d\left(\dfrac{u}{c}\right) = \dfrac{du}{c}$

7b. $d\left(\dfrac{c}{u}\right) = -\dfrac{c}{u^{2}}\,du$

8. $d\left(\sqrt[n]{v}\right) = \dfrac{dv}{n v^{\frac{n-1}{n}}}$

9. *

10. *

11. $d(|\,v\,|) = \dfrac{v}{|\,v\,|}\,dv$

12. $d(\ln v) = \dfrac{dv}{v}$

12a. $d(\ln x)\dfrac{dx}{x}$

13. $d(log\ v) = \dfrac{log\ e}{v}\,d\,v$

13a. $d(log\ x) = \dfrac{log\ e}{x}\,dx$

14. $d\left(a^{v}\right) = a^{v} \ln a\,dv$

14a. $d\left(a^{x}\right) = a^{x} \ln a\,dx$

15. $d\left(e^{v}\right) = e^{v} dv$

15a. $d\left(e^{x}\right) = e^{x}\,dx$

16. $d\left(u^{v}\right) = vu^{v-1}\,du + u^{v} \ln u\,dv$

17. $d(\operatorname{sen} v) = \cos v\,d\,v$

18. $d(\cos v) = -\operatorname{sen} v\,dv$

19. $d(\operatorname{tg} v) = \sec^{2} v\,dv$

20. $d(\operatorname{ctg} v) = -\csc^{2} v\,dv$

21. $d(\sec v) = \sec v\ \operatorname{tg} v\,dv$

22. $d(\csc v) = -\csc v\ \operatorname{ctg} v\,dv$

23. $d(\operatorname{vers} v) = \operatorname{sen} v\,du$

24. $d(\operatorname{arc\,sen} v) = \dfrac{dv}{\sqrt{1 - v^{2}}}$

25. $d(\operatorname{arc\,cos} v) = \dfrac{dv}{\sqrt{1 - v^{2}}}$

26. $d(\operatorname{arc\,tg} v) = \dfrac{dv}{\sqrt{1 + v^{2}}}$

27. $d(\text{arc ctg } v) = -\dfrac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$

28. $d(\text{arc sec } v) = \dfrac{dv}{v\sqrt{v^2-1}}$

29. $d(\text{arc csc } v) = -\dfrac{dv}{v\sqrt{v^2-1}}$

30. $d(\text{arc vers } v) = \dfrac{dv}{\sqrt{2v-v^2}}$

*** Las fórmulas 9 y 10 no son diferenciables ya que son casos especiales de derivación.**

Para determinar la diferencial de una función, el proceso más sencillo es hallar la derivada y después multiplicar por dx.

EJEMPLOS

Hallar la diferencial de las siguientes funciones:

1. $y = ax - bx^3$

$$\frac{dy}{dx} = a - 3bx^2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{dy = \left(a - 3bx^2\right)dx}$$

2. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}$$

3. $y = \ln\left(1-x^2\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\left(1-x^2\right)}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{dy = -\frac{2x\,dx}{\left(1-x^2\right)}}$$

4. $y = \text{sen } 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 6x\cos 3x^2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{dy = 6x\cos 3x^2\,dx}$$

5. $y = ax\,\text{tg}\,x^2$

$$\frac{dy}{dx} = ax\sec^2 x^2(2x) + \text{tg}\,x^2(a)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{dy = \left(2ax^2\sec^2 x^2 + a\,\text{tg}\,x^2\right)dx}$$

6. $y = \text{arc } csc\ 5x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{5x\sqrt{25x^2-1}}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{dy = -\frac{dx}{x\sqrt{25x^2-1}}}$$

EJERCICIO I

I. Calcular la diferencial de las siguientes funciones para el valor dado de la variable independiente y su incremento.

1. $y = 3x^2 - 8x + 5$, cuando $x = 1$ y $dx = 0.1$
2. $y = x + \frac{1}{x}$, cuando $x = 4$ y $dx = 0.02$
3. $y = x^2$, cuando $x = -1$ y $dx = 0.25$
4. $y = 2x^3$, cuando $x = -2$ y $dx = -0.5$
5. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, cuando $x = 2$ y $dx = 0.1$
6. $y = x\sqrt{1 - x^2}$, cuando $x = 0.75$ y $dx = 0.001$
7. $y = \operatorname{tg} x$, cuando $x = 45°$ y $dx = 0.03528$ radianes
8. $y = \cos x$, cuando $x = 30°$ y $dx = -0.02139$ radianes
9. $y = \operatorname{arc\,sen} 2x$, cuando $x = 3$ y $dx = 0.045$
10. $y = \ln x^2$, cuando $x = 5$ y $dx = 0.0083$

II. Resolver los siguientes problemas, empleando diferenciales.

1. Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta de 12 a 12.03 cm; hallar el valor aproximado del incremento del área.
2. Un balín de fierro de 9 cm de radio, por el uso, sufre un desgaste hasta que su radio es de 8.72 cm. Hallar aproximadamente la disminución presentada en su volumen y su área.
3. Si A es el área de un cuadrado de lado 8 cm, hallar dA y construir una gráfica que represente dA y A.
4. Hallar el volumen aproximado de un tubo de cobre de 35 cm de longitud, 2 cm de diámetro interior y 3 mm de espesor.
5. Hallar un valor aproximado del volumen de una cáscara esférica de 300 mm de diámetro exterior y 1.5 mm de espesor.

III. Aplicando diferenciales, hallar aproximadamente los valores para las siguientes expresiones.

1. $\sqrt[3]{65}$
2. 37
3. $\sqrt[4]{83}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{63}}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{50}}$
6. $\sqrt[4]{\dfrac{17}{81}}$
7. $\ln 5.83$
8. $\text{sen } 61°$
9. $\cos 44°$
10. $\text{tg } 46°$
11. $\text{ctg } 29°$
12. $\sec 59°$
13. $\ln 36.4$
14. $e^{2.2}$
15. $e^{5.1}$

IV. Hallar la diferencial para las siguientes funciones:

1. $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x$
2. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$
3. $y = \sqrt{1 - 3x^2}$
4. $y = \sqrt{a^2 + x^2}$
5. $y = \sqrt[3]{4 - 2x^2}$
6. $y = 3x\sqrt{x^2 + 4}$
7. $y = (1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}$
8. $y = 10^{2x^2}$
9. $y = 5^{mx}$
10. $y = e^{bx}$
11. $y = e^{\sqrt{x}}$
12. $y = \ln(4 - 3x)$
13. $y = \ln \sqrt{1 + x^2}$
14. $y = \ln \text{ sen } 2x$
15. $y = \log(ax + b)$
16. $y = \log \sqrt{4 - x^2}$
17. $y = 2 \cos 2x$
18. $y = \dfrac{\text{tg } 4x}{4}$
19. $y = x \csc x$
20. $y = \text{arc sen}\dfrac{x}{2}$

21. $y = \text{arc tg}\left(x^2 - 1\right)$

22. $y = \text{arc sec}\, x^2$

23. $y = \sqrt{\cos\ 5x}$

24. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

25. $y = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

26. $y = e^{-2x} \cos\ 3x$

27. $3x^2 + 2xy + 5y^2 = 24$

28. $x^3 + 6xy^2 + 2y^3 = 10$

29. $x^2 + 4\sqrt{xy} + 2y = a$

30. $\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = C$

31. $x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}$

32. $x - y = e^{x+y}$

33. $2x^3 - xy^2 + 6y = 1$

34. $y = \dfrac{5 - x^2}{5 + x}$

35. $y = \text{arc cos}\left(3x - 4x^3\right)$

1.2 LA INTEGRAL DEFINIDA

La notación sigma

Para facilitar la escritura de sumas con muchos términos, se utiliza la notación sigma. La letra griega mayúscula Σ, que se llama *sigma*, es el símbolo matemático de la sumatoria.

EJEMPLO

1. Escribir los sumandos de cada una de las siguientes sumas indicadas en lenguaje simbólico:

a) $\sum_{K=1}^{8} X_K$ b) $\sum_{K=-3}^{3}(2K+4)$ c) $\sum_{K=2}^{6}\frac{1}{K}$ d) $\sum_{K=2}^{5}K^2$

Solución

a) $\sum_{K=1}^{8} X_K = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8$

b) $\sum_{K=-3}^{3} X_K(2K+4) = [2(-3)+4]+[2(-2)+4]+[2(-1)+4]+[2(0)+4]+$

$+[2(1)+4]+[2(2)+4]+[2(3)+4]$

$\sum_{K=-3}^{3}(2K+4) = -2+0+2+4+6+8+10 = \mathbf{28}$

c) $\sum_{K=2}^{6}\frac{1}{K} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{87}{60} = \mathbf{\frac{29}{20}}$

d) $\sum_{K=2}^{5} K^2 = (2)^2+(3)^2+(4)^2+(5)^2 = 4+9+16+25 = \mathbf{54}$

En forma general, tenemos que:

$$\sum_{K=m}^{n} f(K) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(n)$$

en donde m y n son enteros y $m \leq n$.

En la suma, el número m se denomina *límite inferior* y a n se le llama *límite superior*; el símbolo K (puede emplearse cualquier otra letra, por ejemplo: i, j, etc.) se denomina *índice de la suma*.

Propiedades de la notación sigma

1. $\sum_{K=1}^{n} C = Cn$; donde C es cualquier constante.

2. $\sum_{K=1}^{n} C f(K) = C\sum_{K=1}^{n} f(K)$; donde C es cualquier constante.

3. $\sum_{K=1}^{n} [f(K) + G(K)] = \sum_{K=1}^{n} f(K) + \sum_{K=1}^{n} G(K)$; esta propiedad se puede extender a la suma de cualquier número de funciones.

4. $\sum_{K=1}^{n} [f(K) - f(K-1)] = f(n) - f(0)$

Fórmulas de la notación sigma

1. $\sum_{K=1}^{n} K = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{K=1}^{n} K^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{K=1}^{n} K^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. $\sum_{K=1}^{n} K^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

EJEMPLO

1. Calcular la suma indicada, usando las propiedades y las fórmulas de la notación sigma, para:

   a) $\sum_{K=1}^{n} K(5K-4)$ b) $\sum_{J=1}^{100} 3J$ c) $\sum_{i=1}^{n} 2^i - 2^{i-1}$

Solución

a) $\sum_{K=1}^{n} K(5K-4) = \sum_{K=1}^{n} \left(5K^2 - 4K\right) = \sum_{K=1}^{n} \left(5K^2\right) + \sum_{K=1}^{n} (-4K)$ } *Propiedad* ③

$$= 5\sum_{K=1}^{n} K^2 - 4\sum_{K=1}^{n} K \quad \}\textit{Propiedad } ②$$

$$= 5\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \}\textit{Fórmulas } ② \text{ y } ①$$

$$= \frac{10n^3 + 15n^2 + 5n}{6} - 2n^2 - 2n$$

$$\therefore \quad \sum_{K=1}^{n} K(5K-4) = \frac{10n^3 + 3n^2 - 7n}{6}$$

b) $\sum_{J=1}^{100} 3J = 3\sum_{J=1}^{100} J$ } *Propiedad* ②

$$\sum_{J=1}^{100} 3J = 3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3[100(100+1)]}{2} \}\textit{Fórmula } ①$$

$$\therefore \sum_{J=1}^{100} 3J = 15150$$

c) $\sum_{i=1}^{n} 2^i - 2^{i-1} = 2^n - 2^0$ } *Propiedad* ④

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \left(2^i - 2^{i-1}\right) = 2^n - 1$$

Área bajo una curva

En geometría hemos aprendido a calcular el área de regiones poligonales y circulares. Ahora, analizaremos el problema de la obtención del área de una región del plano cartesiano, la cual está limitada por el eje de las X, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la curva $f(x)$, donde f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ (Figura 1).

Simbolicemos esta área con A y abordemos su cálculo.

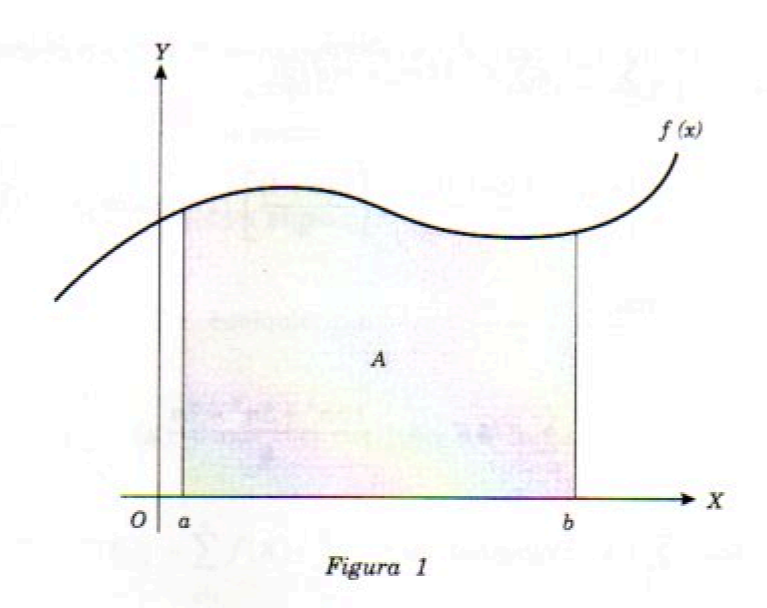


Figura 1

Simbolicemos esta área con A y abordemos su cálculo

Una primera manera aproximada consiste en calcular el área de la región rectangular sombreada (Figura 2).

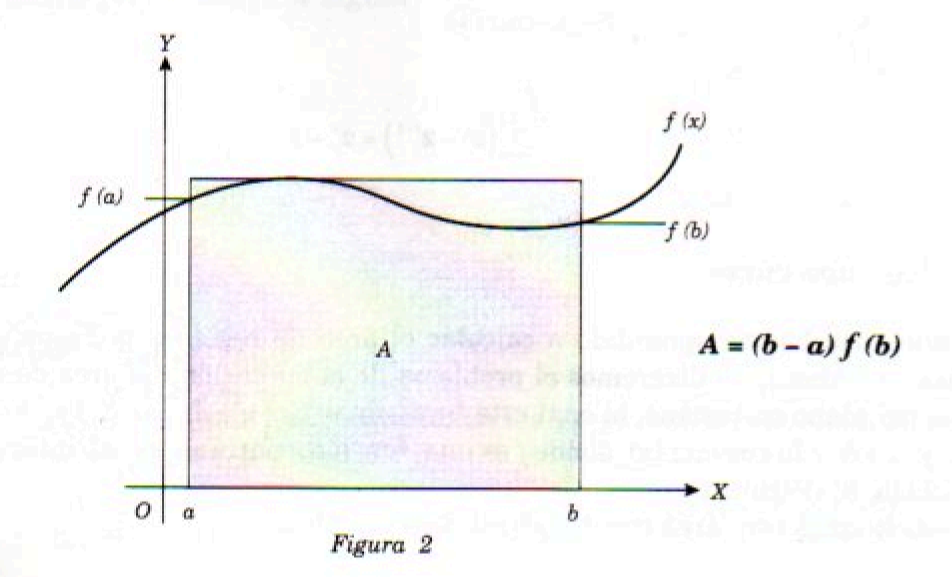


Figura 2

Considerando dos regiones rectangulares, obtenemos una mejor aproximación del área buscada (Figura 3).

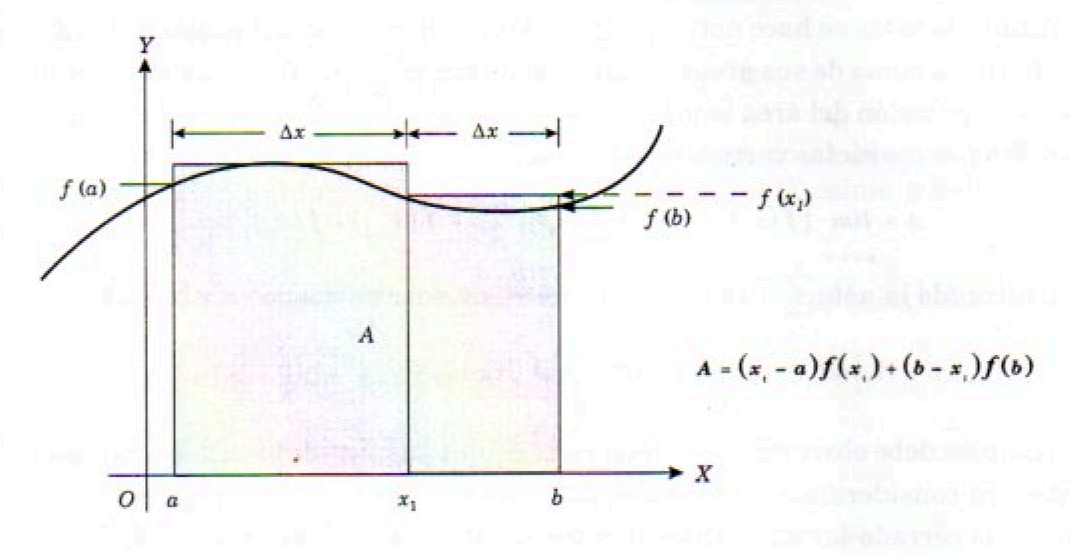


Figura 3

Si los dos subintervalos en que dividimos el intervalo $[a, b]$ tienen la misma longitud, es decir, $\Delta x = (x_1 - a) = (b - x_1)$, la ecuación anterior se puede escribir así:

$$\mathbf{A} = \Delta x\, f(x_1) + \Delta x\, f(b) = \left[f(x_1) + f(b)\right]\Delta x$$

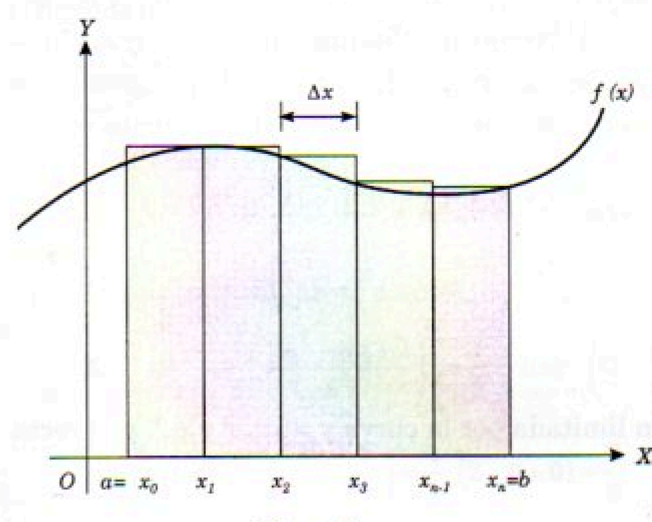


Figura 4

A medida que el número de regiones rectangulares aumenta, la diferencia entre la suma de sus áreas y el área bajo la curva disminuye.

Dividamos el intervalo cerrado $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud (Δx), de manera que

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} \text{ (Figura 4).}$$

Por lo tanto la ecuación de la suma de las áreas de los n rectángulos es:

$$A = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,\Delta x$$

Intuitivamente se hace notar que cuando el número n de rectángulos tiende a infinito, la suma de sus áreas tiende a un límite, que es el área buscada. Por lo tanto, la ecuación del área bajo la curva $f(x)$, limitada, por la izquierda y por la derecha por las rectas verticales $x = x_0 = a$ y $x = x_n = b$, es:

$$A = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_0)]\,\Delta x$$

Utilizando la notación sigma, la ecuación anterior se puede escribir así:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} f(x_K)\,\Delta x$$

También debe observarse que los n rectángulos pueden ser inscritos o circunscritos. Si consideramos rectángulos inscritos, y como $f(x)$ es creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$, el valor mínimo absoluto de la función en el K-ésimo subintervalo $\left[x_{K-1,}\ x_K\right]$ es $f(x_{K-1})$, por lo que la ecuación del área bajo la curva es:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} f(x_{K-1})\,\Delta x$$

Las sumas correspondientes de las áreas de los rectángulos circunscritos son, por lo menos, tan grandes como el área de la región A, y se puede demostrar que el límite de estas sumas cuando n crece sin límite es exactamente el mismo que el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos. El valor máximo absoluto de la función en el K-ésimo subintervalo $[x_{K-1}, x_K]$ es $f(x_K)$, por lo que la ecuación del área bajo la curva dividida por rectángulos circunscritos es:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} f(x_K)\,\Delta x$$

EJEMPLO

1. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje X y la recta $x = 2$, tomando:
   a) Rectángulos inscritos.
   b) Rectángulos circunscritos.

PRACTICA DEL CIRCULO

Solución

a) Dividamos el intervalo cerrado [0, 2] en n subintervalos, cada uno con longitud Δx, es decir:

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} \qquad \frac{(2-0)}{n} = \frac{2}{n}$$

El valor de la función es $y = x^2$ y, como es creciente en el intervalo cerrado [0, 2], el valor mínimo absoluto de la función en el K-ésimo subintervalo $[x_{K-1}, x_K]$ es $f(x_{K-1})$.

Empleando la ecuación respectiva de área: $A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} f(x_{K-1})\,\Delta x$

y como $x_{K-1} = (K-1)\Delta x$ y $f(x) = x^2$, tenemos que: $f(x_{K-1}) = [(K-1)\Delta x]^2$; por lo tanto $\sum_{K=1}^{n} f(x_{K-1})\,\Delta x = \sum_{K=1}^{n} [(K-1)\,\Delta x]^2 \Delta x = \sum_{K=1}^{n} (K-1)^2 (\Delta x)^3$

como $\Delta x = \frac{2}{n}$ y, sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos:

$$\sum_{K=1}^{n} f(x_{K-1})\,\Delta x = \sum_{K=1}^{n} (K-1)^2 \left(\frac{2}{n}\right)^3$$

$$= \frac{8}{n^3} \sum_{K=1}^{n} (K-1)^2 = \frac{8}{n^3}\left[\sum_{K=1}^{n} K^2 - 2\sum_{K=1}^{n} K + \sum_{K=1}^{n} 1\right]$$

Aplicando las fórmulas (2) y (1) y la propiedad (1) de la notación sigma, tenemos:

$$\sum_{K=1}^{n} (x_{K-1})\Delta x = \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2 - 6n + 6n}{6}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}\right)$$

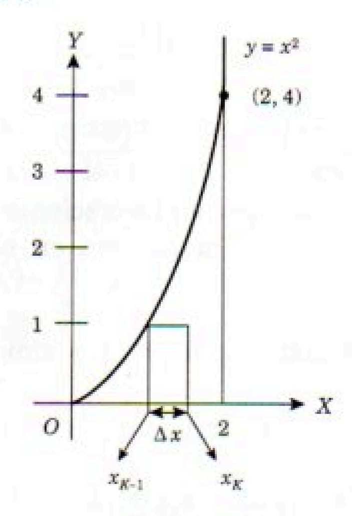
Por la ecuación del área, resulta:

$$A = \lim_{n \to +\infty}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}\right)\right] = \frac{4}{3} \lim_{n \to +\infty}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$A = \frac{4}{3} \lim_{n \to +\infty}\left(2 - \frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}\right) = \frac{4}{3}\,(2 - 0 + 0) = \frac{8}{3}$$

$\therefore$ **El área de la región es de 8/3 de unidades cuadradas.**

Gráficamente, tenemos:



b) El valor máximo absoluto de la función en el K-ésimo subintervalo $[x_{K-1}, x_K]$ es $f(x_K)$. Empleando la ecuación respectiva de área:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} f(x_K)\,\Delta x$$

y como $x_K = K\Delta x$ y $f(x) = x^2$, tenemos que: $f(x_K) = (K\Delta x)^2$, por lo tanto,

$$\sum_{K=1}^{n} f(x_K)\,\Delta x = \sum_{K=1}^{n} (K\Delta x)^2 \Delta x = \sum_{K=1}^{n} K^2 (\Delta x)^3$$

Como $\Delta x = \dfrac{2}{n}$, y sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos:

$$\sum_{K=1}^{n} f(x_K)\,\Delta x = \sum_{K=1}^{n} K^2 \left(\frac{2}{n}\right)^3$$

$$= \frac{8}{n^3} \sum_{K=1}^{n} K^2 \ \Big\}\ \textit{Aplicando la fórmula} \ (2)$$

$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}\right] = \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

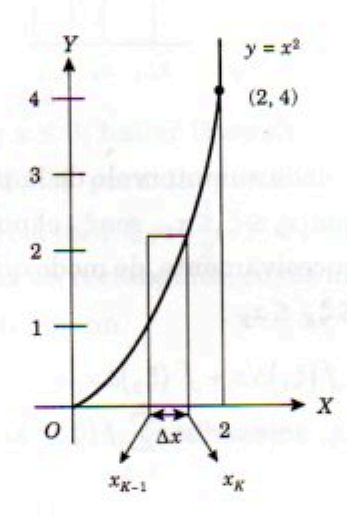
Por la ecuación del área resulta:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{4}{3} \quad A = \lim_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}\right) = \frac{4}{3} \quad (2 + 0 + 0) = \frac{8}{3}$$

∴ El área de la región es de 8/3 de unidades cuadradas.

Gráficamente tenemos:



Suma de Riemann

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Dividamos este intervalo en n subintervalos seleccionando cualesquiera $(n-1)$ puntos intermedios entre a y b. Sean $x_0 = a$ y $x_n = b$ y sean $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}$ los puntos intermedios tales que $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < x_n$; dichos puntos no son necesariamente equidistantes.

Sea Δx_1 la longitud del primer subintervalo tal que $\Delta x_1 = x_1 - x_0$; sea Δx_2 la longitud del segundo subintervalo tal que $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ y así sucesivamente, tales que la longitud del K-ésimo subintervalo sea Δx_K, y que $\Delta x_K = x_K - x_{K-1}$.

Sea $\Delta = \{ a = x_0, x_1, x_2, x_3, . . ., x_{n-1}, x_n = b \}$ el conjunto de todos los n subintervalos del intervalo $[a, b]$, que se denomina *partición* del intervalo $[a, b]$ (Figura 5).

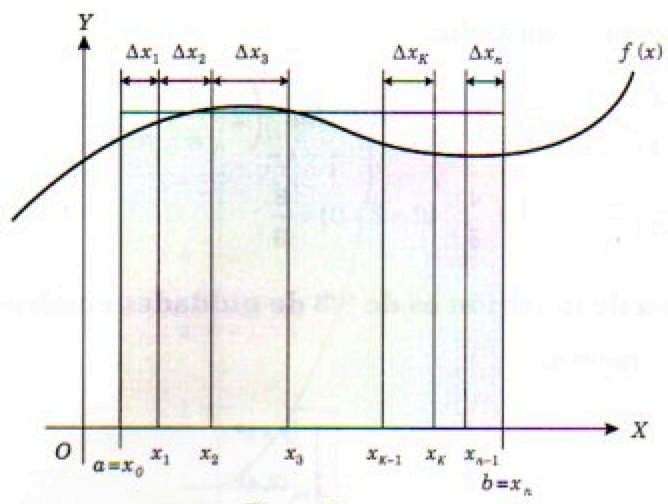


Figura 5

Selecciónese un punto en cada subintervalo de la partición Δ. Sea ξ_1 el punto seleccionado en $[x_0, x_1]$ tal que $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1$, sea ξ_2 el punto seleccionado en $[x_1, x_2]$ tal que $x_1 \leq \xi_2 \leq x_2$, y así sucesivamente, de modo que ξ_K sea el punto seleccionado en $[x_{K-1}, x_K]$ y $x_{K-1} \leq \xi_K \leq x_K$.

La suma de los productos $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_K)\Delta x_K + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$ que, por la notación sigma, se escribe $\sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\,\Delta x_K$, se denomina *suma de Riemann* (Figura 6).

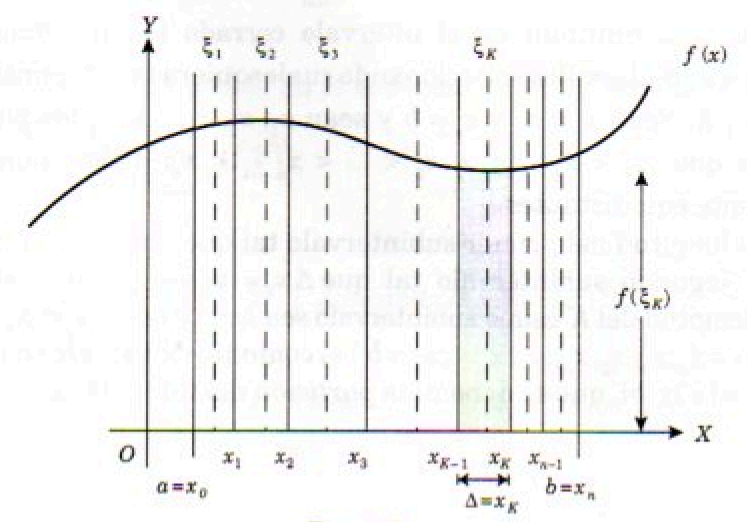


Figura 6

La suma de Riemann representa geométricamente la suma de las áreas de los rectángulos que tienen como base Δx_K y como altura $f(\xi_K)$.

$$\mathbf{A} = \sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\,\Delta x_K$$

El límite de la suma de Riemann, si existe, representa geométricamente el área de la región limitada por la curva f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X.

$$\mathbf{A} = \lim_{n \to +\infty} = \sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\,\Delta x_K$$

EJEMPLO

1. Dada $f(x) = x^2$, con $0 \le x \le 3$, hallar la suma de Riemann para la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 3]$ para la partición $\Delta: x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1\frac{1}{4},\ x_3 = 2\frac{1}{4}, x_4 = 3$ y $\xi_1 = \frac{1}{4},\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = 1\frac{1}{2}$, y $\xi_4 = 2\frac{1}{2}$. Trazar la gráfica de la función en $[0, 3]$, mostrar los rectángulos, cuyas medidas de área son los términos de las sumas de Riemann.

Solución

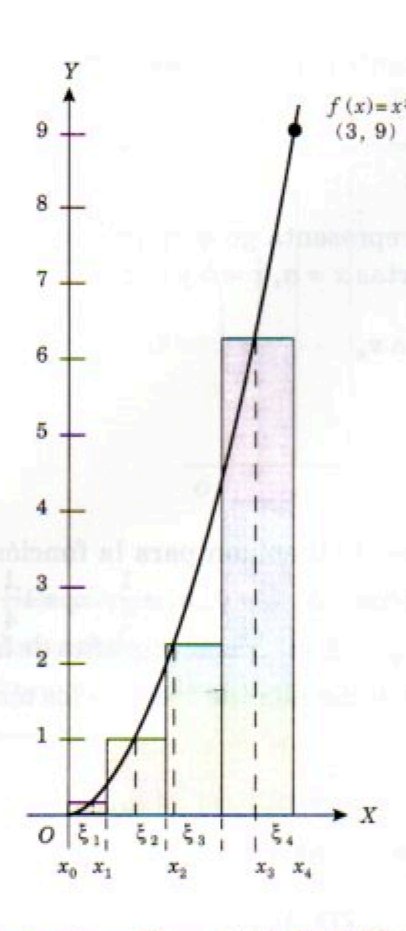
La suma de Riemann para la función dada es:

$$\sum_{K=1}^{4} f(\xi_K)\Delta x_K = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + f(\xi_4)\Delta x_4$$

$$\sum_{K=1}^{4} f(\xi_K)\Delta x_K = f\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) + f(1)\left(1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + f\left(1\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right)\left(3 - 2\frac{1}{4}\right)$$

$$\sum_{K=1}^{4} f(\xi_K)\Delta x_K = (0.0625)(0.5) + (1)(0.75) + (2.25)(1) + (6.25)(0.75)$$

$$\sum_{K=1}^{4} f(\xi_K)\Delta x_K = 0.03125 + 0.75 + 2.25 + 4.6875 = \mathbf{7.71875} = \frac{\mathbf{247}}{\mathbf{32}}$$



∴ La suma de Riemann para la función $f(x) = x^2$ en el intervalo cerrado [0, 3] es de 7.71875 o $\frac{247}{32}$.

Introducción a la definición de la integral de una función

El concepto de *derivación* es requerido para precisar la descripción de pendiente de una curva, la velocidad de las partículas en movimiento o, más generalmente del concepto de razón de cambio. La descripción precisa de la noción intuitiva del área de una región con fronteras curvas está dada por el proceso de *integración*, la noción de área, así como algunos otros conceptos geométricos y físicos, se encuentra estrechamente ligada a la integración.

Integral definida

Si $f(x)$ es una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la *integral definida* de $f(x)$ de a a b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, está dada por el límite de una suma de Riemann cuando el número n de subintervalos tiende a más infinito $(+\infty)$. Simbólicamente tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\,\Delta x_K \quad \textbf{\textit{Si tal límite existe}}$$

Matemáticamente se lee: *La integral definida de $f(x)$ entre los límites a y b.*

Notación de Leibniz para la integral

La definición de la integral como límite de una suma condujo a Leibniz (1646 - 1716) a representar la integral mediante la siguiente simbología:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

El símbolo de integral es una modificación del símbolo de sumatoria en forma de una S grande que se usó en la época de Leibniz. El paso al límite a partir de una subdivisión finita en porciones Δx_K se indica mediante el uso de la letra d en lugar de Δ.

De la notación para la integral definida, identificamos:

b → *Límite de integración superior*

$f(x)$ → *Integrando*

dx → *Diferencial de la integral*

a → *Límite de integración inferior*

La integral definida propia e impropia

La integral definida entre los límites a y b representada por la expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se interpretará geométricamente como el área de la región del plano cartesiano limitada por la curva f, las rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje de las X.

Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud (Δx) podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(\xi_K)\,\Delta x \qquad Si\ n \to +\infty \quad \therefore\ \Delta x \to 0$$

Si los n subintervalos de la partición del intervalo $[a, b]$ no son de la misma longitud, existe un subintervalo tal cuya longitud es mayor o igual que la de cualquier otro. A la longitud de tal subintervalo se le denomina *norma de la partición* y se denota por $|\Delta x|$.

Está claro que si $n \to +\infty$, entonces $|\Delta x| \to 0$; por lo tanto, podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{K=1}^{n} \int(\xi_K)\Delta x_K$$

Si consideramos la expresión anterior y si f es continua en $[a, b]$, estamos seguros que el $\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\Delta x_K$ existe y por lo tanto f es integrable en $[a, b]$.

De lo anterior establecemos que $\int_a^b f(x)dx$ representa la *integral propia* de $f(x)$ de a a b.

Si f no es continua en $[a, b]$, entonces el límite puede existir o no existir y por lo tanto f puede ser integrable en $[a, b]$ o no serlo.

De lo anterior establecemos que $\int_a^b f(x)dx$ representa la *integral impropia* de $f(x)$ de a a b, siempre y cuando el límite exista; en el caso en que el límite no exista, se establece que $\int_a^b f(x)dx$ no tiene significado.

EJEMPLO

1. Hallar el valor exacto de la integral definida $\int_0^3 x^2 dx$.

Solución

Consideramos una partición regular del intervalo cerrado $[0, 3]$ en n subintervalos, es decir:

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(3-0)}{n} = \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{n}}$$

Seleccionando a ξ_K como un punto en cada subintervalo, tenemos:

$$\xi_1 = 0 + \frac{3}{n},\ \xi_2 = 0 + 2\left(\frac{3}{n}\right),\ \xi_3 = 0 + 3\left(\frac{3}{n}\right), \ldots, \xi_K = 0 + K\left(\frac{3}{n}\right), \ldots,\ \xi_n = 0 + n\left(\frac{3}{n}\right).$$

Como $f(x) = x^2$, resulta: $\quad f(\xi_K) = \left(0 + \frac{3K}{n}\right)^2 = \frac{\mathbf{9K^2}}{\boldsymbol{n^2}}$

Por la expresión $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\Delta x_K$, tenemos:

$$\int_0^3 x^2 dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{9K^2}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{27}{n^3} \sum_{K=1}^{n} K^2$$

Por la fórmula (2) de la notación sigma, resulta:

$$\int_0^3 x^2dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{2}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}\right)$$

$$\int_0^3 x^2dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{2}\left[2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}\right)$$

$$\int_0^3 x^2dx = \frac{9}{2}(2+0+0) = \mathbf{9}$$

$\therefore$ Geométricamente la $\int_0^3 x^2dx$ representa una región de área igual a 9 unidades cuadradas.

EJERCICIO II

I. Contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Para qué se utiliza la notación sigma?
2. Matemáticamente, ¿cómo se simboliza una sumatoria?
3. ¿Qué elementos se consideran para calcular el área bajo una curva en una región del plano cartesiano?
4. Explicar cómo se precisa el cálculo del área de una región del plano cartesiano.
5. ¿Cuál es la diferencia entre el uso de rectángulos inscritos y circunscritos en el cálculo del área de una región del plano cartesiano?
6. ¿A qué se le llama partición del intervalo $[a, b]$?
7. ¿Qué es la suma de Riemann?
8. Geométricamente, ¿qué representa una suma de Riemann?
9. Geométricamente, ¿qué representa el límite de una suma de Riemann?
10. Definir *integral definida*.
11. Explicar la notación de Leibniz para la integral.
12. ¿A qué se le llama *norma de la partición*?
13. Explicar cuándo se tiene una *integral propia* y cuándo una *impropia*.

II. Resolver los siguientes problemas:

1. Escribir los sumandos de cada una de las siguientes sumas indicadas por el lenguaje simbólico de:

a) $\sum_{k=1}^{5}(Z_k - 1)^3$ b) $\sum_{k=1}^{4}\left(a_k x_k^2\right)$ c) $\sum_{k=1}^{7}\left(x_k - y_k\right)$

2. Aplicando el lenguaje simbólico de la notación sumatoria, exprese cada una de las siguientes sumas:

a) $(m_1 + n_1) + (m_2 + n_2) + (m_3 + n_3) + \ldots + (m_8 + n_8)$

b) $(2x_1 - y_1 + b_1) + (2x_2 - y_2 + b_2) + \ldots + (2x_n - y_n + b_n)$

c) $\frac{a_1}{1+x_1} + \frac{a_2}{1+x_2} + \frac{a_3}{1+x_3} + \ldots + \frac{a_7}{1+x_7}$

d) $\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2} + \sqrt{x_3 - 2} + \ldots + \sqrt{x_{10} - 2}$

3. Calcular la suma dada por:

a) $\sum_{K=1}^{8}(5K - 3)$ c) $\sum_{K=1}^{4}\left(\frac{K}{K-1}\right)$ e) $\sum_{J=-1}^{3}\left(\frac{1}{J^2+1}\right)$

b) $\sum_{K=1}^{7}(K+1)^2$ d) $\sum_{J=-3}^{5}2^J$ f) $\sum_{J=-1}^{5}\frac{(-1)^{J+1}}{J}$

4. Calcular la suma indicada usando las propiedades y las fórmulas de la notación sigma para:

a) $\sum_{K=1}^{25}2K(K-1)$ c) $\sum_{K=1}^{n}\left(5^{K-1} - 5^K\right)$ e) $\sum_{K=1}^{6}\left[\frac{1}{K(K-1)}\right]$

b) $\sum_{K=1}^{20}3K\left(K^2+2\right)$ d) $\sum_{J=1}^{100}\left[\frac{1}{J} - \frac{1}{J+1}\right]$ f) $\sum_{J=1}^{40}\left[\sqrt{2J+1} - \sqrt{2J-1}\right]$

5. Hallar el área de la región limitada por la curva dada, el eje X y las rectas indicadas, tomando rectángulos inscritos y circunscritos, para cada función.

a) $y = 2^x$, las rectas $x = -4$ y $x = 4$

b) $y = x^2$, las rectas $x = -4$ y $x = 0$

c) $y = x + 4$, las rectas $x = -2$ y $x = 3$

d) $y = \sqrt{3 - x}$, las rectas $x = -6$ y $x = 3$

e) $y = e^x$, las rectas $x = -2$ y $x = 3$

f) $y = \frac{1}{x^2}$, las rectas $x = 1$ y $x = 3$

6. Determinar la suma de Riemann para la función dada en el intervalo indicado, usando la partición dada Δ y los valores indicados de ξ_K. Trazar la gráfica de la función en el intervalo dado y mostrar los rectángulos cuyas medidas de área son los términos de la suma de Riemann.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq 3$; para Δ: $x_0 = 1$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{2}{3}$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = 1\frac{1}{4}$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_4 = 2\frac{3}{4}$

b) $f(x) = x^3$, $-1 \leq x \leq 2$; para Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -1/3$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1\frac{1}{4}$, $x_5 = 2$; $\xi_1 = -1/2$, $\xi_2 = 2/3$, $\xi_4 = 1$, $\xi_5 = 1\frac{1}{2}$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$, $0 \leq x \leq 2$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.7$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1.3$, $x_6 = 1.8$, $x_7 = 2$; $\xi_1 = 0.1$, $\xi_2 = 0.4$, $\xi_3 = 0.6$, $\xi_4 = 0.9$, $\xi_5 = 1.1$, $\xi_6 = 1.5$, $\xi_7 = 2$

d) $f(x) = x^2$, $1 \leq x \leq 4$; para Δ: $x_0 = 1$, $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_2 = 2\frac{1}{4}$, $x_3 = 3\frac{1}{4}$, $x_4 = 4$; $\xi_1 = 1\frac{1}{4}$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_4 = 3\frac{1}{2}$

e) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $-1 \leq x \leq 3$; para Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -1/4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 1\frac{1}{4}$, $x_5 = 2$, $x_6 = 2\frac{1}{4}$, $x_7 = 2\frac{3}{4}$, $x_8 = 3$; $\xi_1 = -3/4$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1/4$, $\xi_4 = 1$, $\xi_5 = 1\frac{3}{4}$, $\xi_6 = 2$, $\xi_7 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_8 = 3$

7. Hallar el valor exacto de la integral definida.

a) $\int_{1}^{4} x^{3}\, dx$

b) $\int_{-3}^{3} \left(x^{3}+1\right) dx$

c) $\int_{1}^{3} \frac{1}{x}\, dx$

d) $\int_{1}^{3} 4\, dx$

e) $\int_{1}^{4} (2x+1)\, dx$

f) $\int_{0}^{4} 5x\, dx$

g) $\int_{2}^{5} x^{2}\, dx$

h) $\int_{1}^{3} (x^{2}+6x+3)\, dx$

i) $\int_{-1}^{2} \left(x^{2}+x-4\right) dx$

1.3 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Calcular la integral definida a partir de su definición, es decir, determinando el límite de la suma de Riemann, resulta ser bastante tedioso y generalmente casi imposible. Con el fin de establecer un método sencillo y eficaz, es necesario desarrollar algunas propiedades de la integral definida.

Teoremas sobre las sumas de Riemann

1.Si Δ es cualquier partición del intervalo cerrado $[a, b]$, se establece que:

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{K=1}^{n} \Delta x_K = b - a$$

2. Si f está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\Delta x_K$ existe, donde Δ es cualquier partición del intervalo $[a, b]$, entonces si C es cualquier constante, tenemos:

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{K=1}^{n} Cf(\xi_K)\Delta x_K = C \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\Delta x_K$$

(La demostración de estos teoremas se deja para el alumno)

Teoremas que dan lugar a las propiedades de la integral definida

1. Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si C es cualquier constante, tenemos:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

2. Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y se establece que:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Este teorema se puede aplicar a cualquier número de funciones, es decir, si las funciones f_1, $f_2, f_3, \ldots, f_n$ son todas integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\left(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\right)$ es integrable en $[a, b]$, y se tiene:

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ \ldots\ +f_n(x)]\,dx =$$
$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b f_3(x)dx\ +\ \ldots\ + \int_a^b f_n(x)\,dx$$

El signo más (+) se puede sustituir por un signo menos (–) como resultado de aplicar el Teorema 1 para las propiedades de la integral definida, en donde $C = -1$.

3. Si la función f es integrable en los intervalos cerrados $[a, b]$, $[a, C]$ y $[C, b]$, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{si } a < C < b$$

Este teorema se interpreta geométricamente; si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces se establece que la medida del área de la región acotada por la curva $y = f(x)$ y el eje X de a a b es igual a la suma de las medidas de las áreas de las regiones de a a C y de C a a (Figura 1).

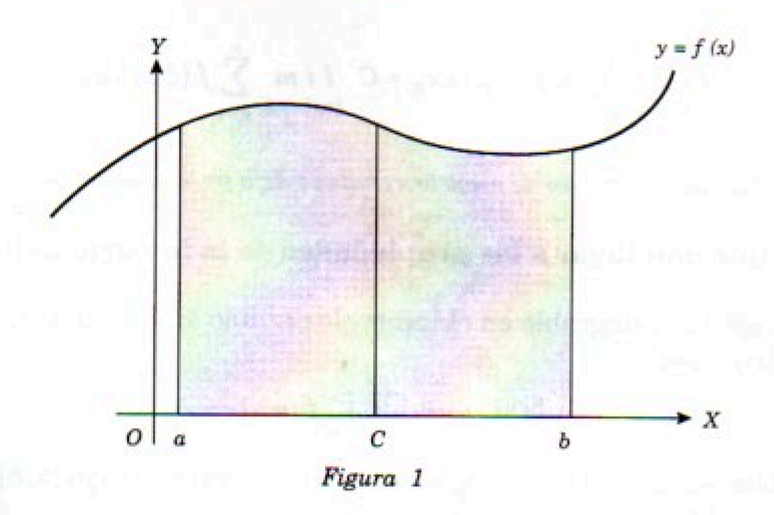


Figura 1

4. Si f es integrable en un intervalo cerrado que contiene los tres números a, b y C, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Y ello sin importar cuál sea el orden de los números a, b, C.

5. Si C es una constante y si f es una función tal que $f(x) = C$ para toda x en el intervalo cerrado $[a, b]$, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

Este teorema se interpreta geométricamente cuando $C > 0$, estableciéndose que la integral definida $\int_a^b C\,dx$ da la medida del área de la región sombreada, que es un rectángulo cuyas dimensiones son C unidades y $(b-a)$ unidades (Figura 2).

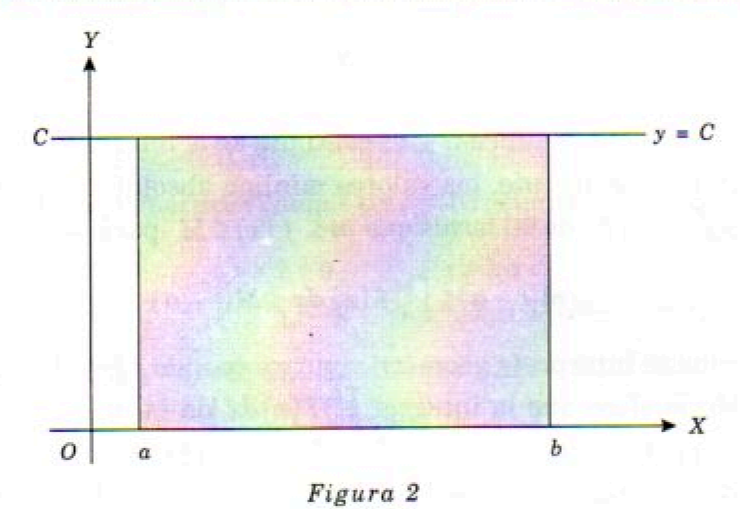


Figura 2

6. Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$, tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x) = dx$$

Este teorema se interpreta geométricamente cuando $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo cerrado $[a, b]$, estableciéndose que la $\int_a^b f(x)dx$ da la medida del área de la región acotada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$. La $\int_a^b g(x)dx$ da la medida del área de la región acotada tanto por la curva $y = g(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$. Se hace notar que la primer área es mayor que la segunda (Figura 3).

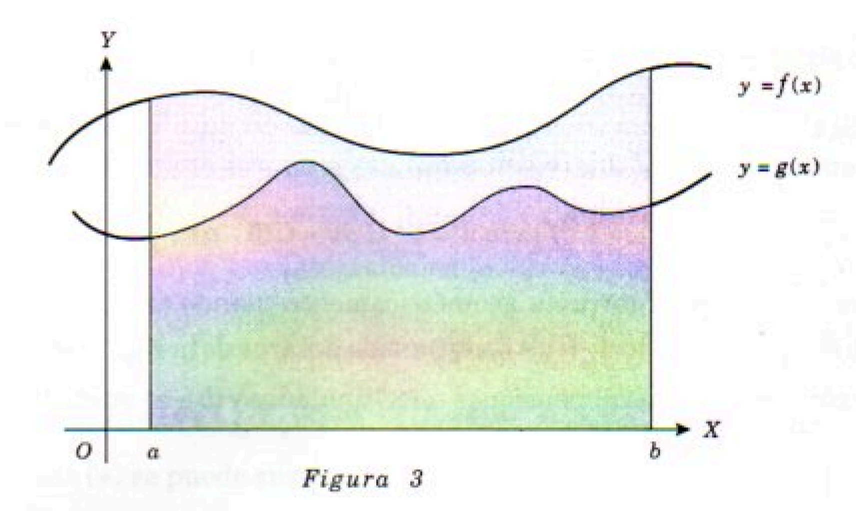


Figura 3

7. Supongamos que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si m y M son, respectivamente, los valores mínimo absoluto y máximo absoluto de la función f en $[a, b]$, de tal forma que $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Este teorema se interpreta geométricamente cuando $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, estableciéndose que la integral $\int_a^b f(x)dx$ da la medida del área de la región acotada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$. Esta área es mayor que la del rectángulo cuyas dimensiones son m y $(b - a)$ y menor que la del rectángulo cuyas dimensiones son M y $(b - a)$. Lo anterior se representa en la Figura 4.

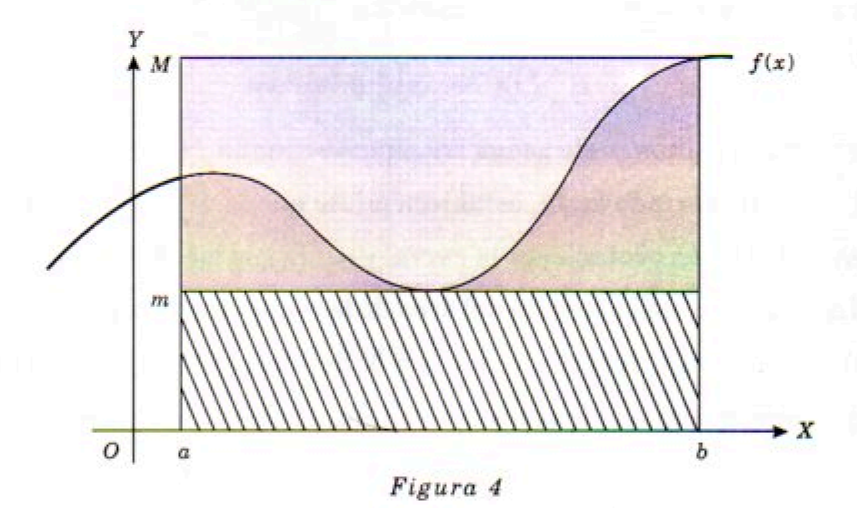


Figura 4

EJEMPLO

1. Aplicar el Teorema 7 de las propiedades de la integral definida para hallar el mayor valor y el menor valor posibles de:

$$\int_{-3}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 - 12x\right) dx$$

Solución

I. Primeramente, se habrán de calcular los máximos y mínimos relativos para $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = x^2 + x - 2$$

a) Se halla la primera derivada de la función:

b) Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante:

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad x + 2 = 0 \qquad x - 1 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0 \qquad \mathbf{x_1 = -2} \qquad \mathbf{x_2 = 1}$$ } *Raíces reales o valores críticos*

c) Se analizan los valores críticos uno por uno:

Para $x = -2$

Un valor un poco menor	*Un valor un poco mayor*
$\mathbf{x = -3}$	$\mathbf{x = -1}$
$y' = x^2 + x - 2$	$y' = x^2 + x - 2$
$y' = (-3)^2 + (-3) - 2$	$y' = (-1)^2 + (-1) - 2$
$y' = 9 - 3 - 2 = 4$	$y' = 1 - 1 - 2 = -2$
$\therefore y' = \oplus$	$\therefore y' = \ominus$

Máximo

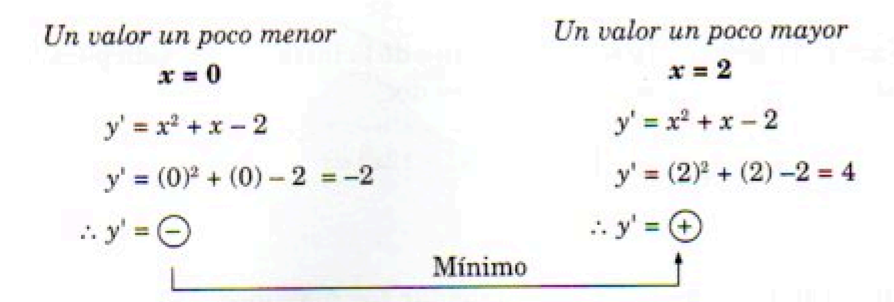
Para $x = -2$, tenemos un máximo cuyo valor es:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

$$y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = 20$$

$\therefore$ **Cuando $x = -2$, tenemos un máximo de 20.**

Para $x = 1$



Para $x = 1$, tenemos un mínimo cuyo valor es:

$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

$y = 2(1)^3 + 3(1) - 12(1) = -7$

$\therefore$ Cuando $x = 1$, tenemos un mínimo de -7.

II. Calculando los valores de $f(x)$ para el intervalo $[-3, 3]$, tenemos:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x$$

$$f(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 12(-3) \qquad f(3) = 2(3)^3 + 3(3)^2 - 12(3)$$

$$\therefore \boldsymbol{f(-3) = 9} \qquad \therefore \boldsymbol{f(3) = 45}$$

Por lo tanto el valor mínimo absoluto de la función en el intervalo cerrado $[-3, 3]$ es -7 y el valor máximo absoluto es 45.

III. Tomando $m = -7$ y $M = 45$ en la ecuación del Teorema 7, tenemos:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$(-7)[3-(-3)] \leq \int_{-3}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 - 12x\right) dx \leq 45[3-(-3)]$$

$$\boldsymbol{-42 \leq \int_{-3}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 - 12x\right) dx \leq 270}$$

(Más adelante se demuestra que el valor exacto de la integral definida es 54.)

Teorema del valor medio para integrales

Antes de realizar el *teorema del valor medio para integrales*, estudiaremos un teorema importante sobre una función que es continua en un intervalo cerrado, el llamado *teorema del valor intermedio*, el cual es necesario para demostrar el teorema del valor medio para integrales.

El teorema del valor intermedio establece:

> **Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier número k entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$.**

(La demostración de este teorema rebasa del objetivo de este libro; se puede tener mayor información en un libro de cálculo avanzado.)

Analizaremos la interpretación geométrica del teorema del valor intermedio. En la Figura 5 se observa que (O, k) es cualquier punto del eje Y entre los puntos $[O, f(a)]$ y $[O, f(b)]$. El teorema del valor intermedio establece que la recta $y = k$ debe intersecar la curva cuya ecuación es $y = f(x)$ en el punto (c, k), donde c está entre a y b (Figura 5).

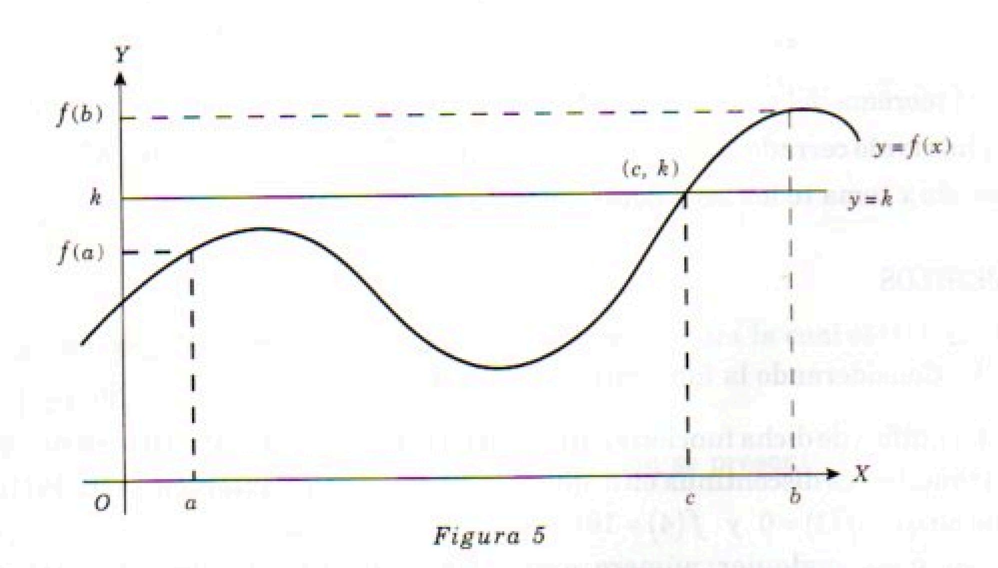


Figura 5

Se hace notar que para algunos valores de k puede existir más de un valor para c. El teorema del valor intermedio establece que siempre existe por lo menos un valor de c, pero que no es necesariamente único (Figura 6).

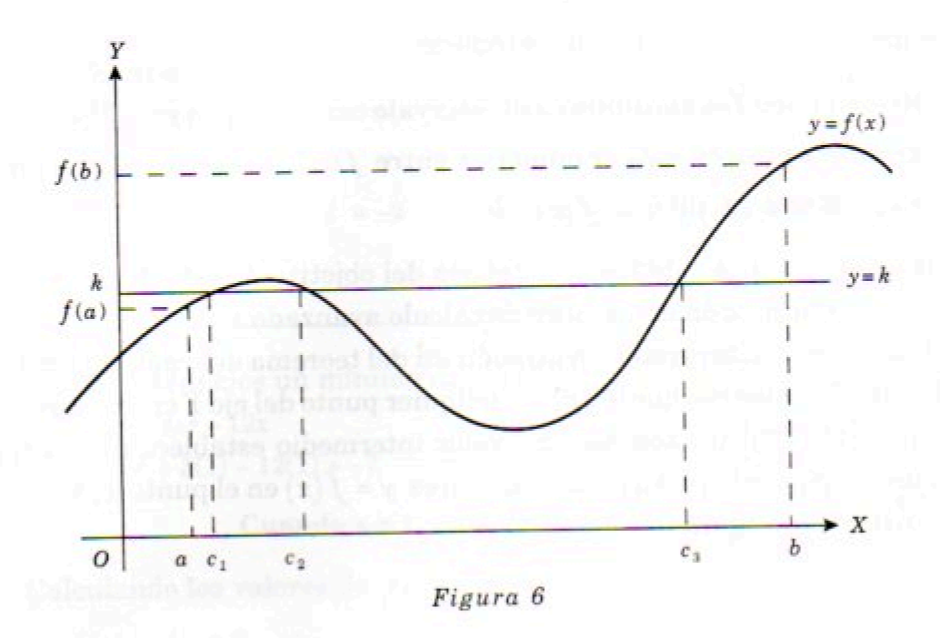


Figura 6

El teorema del valor intermedio establece que si la función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ cuando x toma todos los valores entre a y b.

EJEMPLOS

1. Considerando la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ x^2 & \text{si } 3 < x \le 4 \end{cases}$

La gráfica de dicha función se presenta en la Figura 7, donde se hace notar que: La función f es discontinua en 3, que está contenido en el intervalo cerrado $[1, 4]$, puesto que $f(1) = 0$ y $f(4) = 16$.

Si k es cualquier número entre 2 y 9, no existe valor de c tal que $f(c) = k$ porque no hay valores de la función entre 2 y 9.

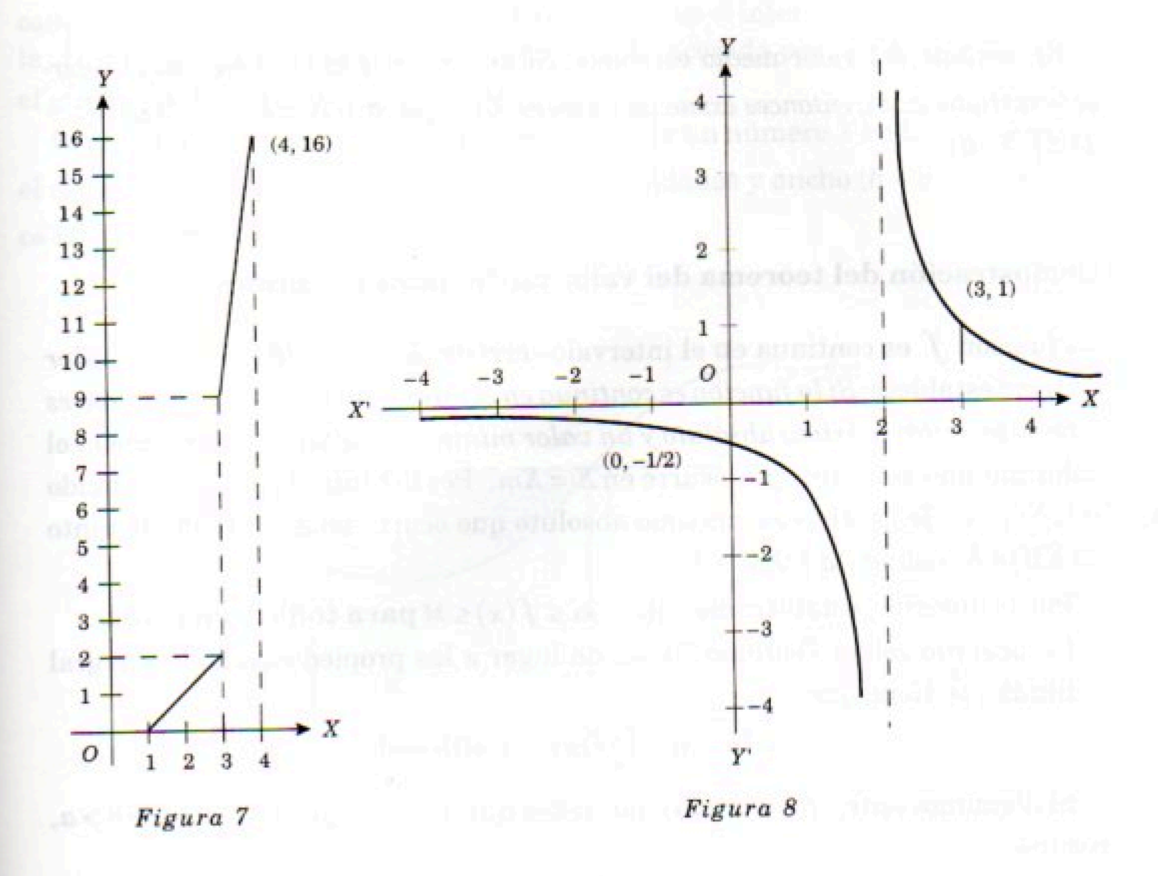


Figura 7 *Figura 8*

Consideremos ahora otro ejemplo de una función para la cual el teorema del valor intermedio no es válido.

2. Sea $f(x) = \frac{1}{x-2}$; la gráfica de dicha función se presenta en la Figura 8, donde se hace notar que:

La función f es discontinua en 2, que está contenido en el intervalo cerrado [0, 3], puesto que $f(0) = -1/2$ y $f(3) = 1$.

Si k es cualquier número entre −1 1/2 y 1, no existe valor de c entre 0 y 3 tal que $f(c) = k$.

Particularmente se hace notar que si $k = 1/2$, entonces $f(4) = 1/2$, pero 4 no está contenido en el intervalo [0, 3]. Ahora estamos en condiciones para establecer y demostrar el teorema del valor medio para integrales.

El teorema del valor medio establece: *Si la función f es continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$, *entonces existe un número X tal que* $a \leq X \leq b$ y $\int_a^b f(x)\,dx = f(X)(b-a)$.

Demostración del teorema del valor medio para integrales

La función f es continua en el intervalo cerrado [a, b], y el *Teorema del valor extremo* establece: *Si la función es continua en el intervalo cerrado* [a, b], *entonces* f *tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en* [a, b]. Sea m el valor mínimo absoluto que ocurre en $X = Xm$. Por lo tanto $f(Xm) = m$ cuando $a \leq Xm \leq b$. Sea M el valor máximo absoluto que ocurre en $X = XM$. Por lo tanto $f(XM) = M$ cuando $a \leq XM \leq b$.

Por lo anterior, establecemos que: $m \leq f(x) \leq M$ **para toda** X **en** $[a, b]$.

De acuerdo con el Teorema 7 (que da lugar a las propiedades de la integral definida), se tiene que:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Si dividimos entre $(b-a)$ y hacemos notar que $(b-a)$ es positivo porque $b > a$, resulta:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq M$$

Si $m = f\,(Xm)$ y $M = f\,(XM)$, sustituyendo en las desigualdades anteriores, resulta:

$$f\,(Xm) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq f\,(XM)$$

Con base en las desigualdades anteriores y el teorema del valor intermedio, establecemos que: *Existe un número X en un intervalo cerrado que contiene a Xm y XM tal que*

$$f(X) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \quad \text{o bien:}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int (x)(b-a) \text{ si } a \leq X \leq b$$

Con lo anterior queda demostrado el teorema del valor medio para integrales.

Con el fin de interpretar geométricamente el teorema del valor medio,

consideramos $f(x) \geq 0$ para todos los valores de X en el intervalo $[a, b]$. Entonces la $\int_a^b f(x)\,dx$ es la medida del área de la región acotada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ (Figura 9).

El teorema del valor medio establece que existe un número X en $[a, b]$, tal que el área del rectángulo $AEFB$ de altura $f(x)$ unidades y ancho $(b - a)$ unidades es igual al área de la región $ADCB$.

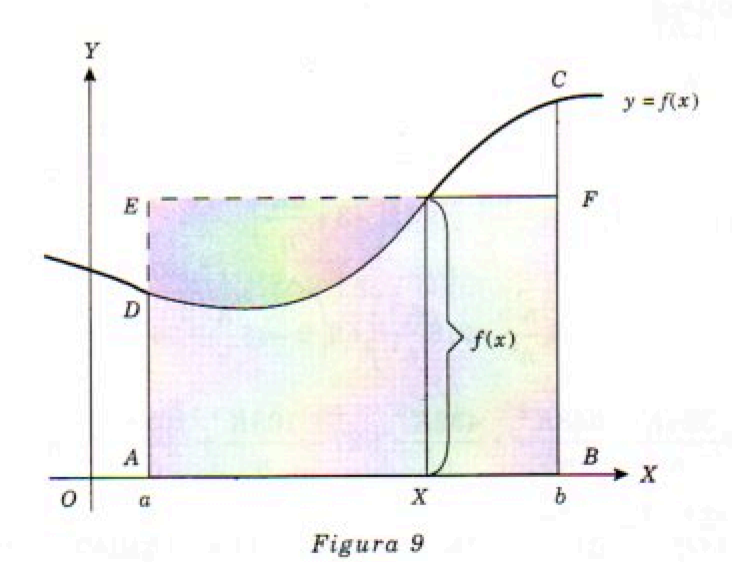


Figura 9

El valor de X no es necesariamente único. El teorema del valor medio no tiene un método para determinar X, pero establece que existe un valor de X, lo cual se usa para demostrar otros teoremas. Sólo en algunos casos particulares se puede hallar el valor de X tal y como se explica en el siguiente:

EJEMPLO

1. Hallar el valor de X tal que $\int_{-3}^{3} f(x)dx = f(X)[3-(-3)]$ si $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Solución

Primero se determina el valor exacto de la integral definida

$$\int_{-3}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 - 12x\right) dx.$$

Considerando una partición regular del intervalo cerrado $[-3, 3]$ en n subintervalos, es decir:

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{[3-(-3)]}{n} = \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{n}}$$

Seleccionando ξ_K como un punto en cada subintervalo, tenemos:

$$\xi_1 = -3 + \frac{6}{n},\ \xi_2 = -3 + 2\left(\frac{6}{n}\right),\ \xi_3 = -3 + 3\left(\frac{6}{n}\right),\ \ldots,\ \xi_K = -3 + K\left(\frac{6}{n}\right),\ \ldots,$$

$$\xi_n = -3 + n\left(\frac{6}{n}\right)$$

Como $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ resulta:

$$f(\xi_K) = 2\left(-3 + \frac{6K}{n}\right)^3 + 3\left(-3 + \frac{6K}{n}\right)^2 - 12\left(-3 + \frac{6K}{n}\right)$$

$$f(\xi_K) = 2\left(-27 + 162\frac{K}{n} - 324\frac{K^2}{n^2} + 216\frac{K^3}{n^3}\right) + 3\left(9 - 36\frac{K}{n} + 36\frac{K^2}{n^2}\right) - 12\left(-3 + \frac{6K}{n}\right)$$

$$f(\xi_K) = -54 + \frac{324K}{n} - \frac{648K^2}{n^2} + \frac{432K^3}{n^3} + 27 - \frac{108K}{n} + \frac{108K^2}{n^2} + 36 - \frac{72K}{n}$$

$$f(\xi_K) = 9 + \frac{144K}{n} - \frac{540K^2}{n^2} + \frac{432K^3}{n^3} = \left(\frac{\mathbf{9n^3 + 144Kn^2 - 540K^2n + 432K^3}}{\boldsymbol{n^3}}\right)$$

Por la expresión $\int_a^b f(x)\,dx = A = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{K=1}^{n} f(\xi_K)\Delta x$, tenemos:

$$\int_{-3}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 - 12x\right)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{9n^3 + 144Kn^2 - 540K^2n + 432K^3}{n^3}\right)\left(\frac{6}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n^4} \sum_{K=1}^{n} \left(9n^3 + 144Kn^2 - 540K^2n + 432K^3\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n^4} \left(9n^3 \sum_{K=1}^{n} 1 + 144n^2 \sum_{K=1}^{n} K - 540n \sum_{K=1}^{n} K^2 + 432 \sum_{K=1}^{n} K^3\right)$$

Por las fórmulas de la notación sigma, resulta:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{6}{n^4}\left[9n^3(n)+144n^2\frac{(n)(n+1)}{2}-540n\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}+432\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{6}{n^4}\left(9n^4+\frac{144n^4+144n^3}{2}-\frac{1080n^4+1620n^3+540n^2}{6}+\frac{432n^4+864n^3+432n^2}{4}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{6}{n^4}\left(\frac{54n^4+432n^4+432n^3-1080n^4+1620n^3+540n^2+648n^4+1296n^3+648n^2}{6}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{54n^4+108n^3+108n^2}{n^4}\right)=\lim_{n \to +\infty}\left(54+\frac{108}{n}+\frac{108}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty}\left(54+\frac{108}{\infty}+\frac{108}{\infty^2}\right)=54+0+0=\mathbf{54}$$

$\therefore$ El valor exacto de la integral definida $\int_{-3}^{3}\left(2x^3+3x^2-12x\right)dx$ es de 54 unidades cuadradas.

Por el teorema del valor medio para integrales, tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x)(b-a)$$

$$\int_{-3}^{3}\left(2x^3+3x^2-12x\right)dx = f(x)[3-(-3)] \quad 54 = f(x)(6) \; \therefore \; f(x)=9$$

Para determinar el valor de x, tenemos que: $2x^3+3x^2-12x=9$

$$x\left(2x^2+3x-12\right)=9$$

Así obtenemos las ecuaciones: $x=9$ y $2x^2+3x-12=9$ o $2x^2+3x-21=0$.

Para la primera ecuación tenemos $\therefore$ $\boldsymbol{x_1=9}$.

Para la segunda ecuación aplicamos la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, resultando:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-21)}}{2(2)} \qquad \therefore\ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{177}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{177}}{4} \qquad \therefore\ x_3 = \frac{-3 - \sqrt{177}}{4}$$

Rechazamos los valores de $x_1 = 9$ y $x_3 = \frac{-3\sqrt{177}}{4}$ porque no están contenidos en el intervalo cerrado [– 3, 3].

$$\therefore\ \int_{-3}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 - 12x\right) dx = f\left(\frac{-3 + \sqrt{177}}{4}\right)(6)$$

Valor promedio

El valor $f(x)$ dado por el teorema del valor medio para integrales se llama el *valor medio* o *valor promedio* de f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Es una generalización de la media aritmética de un conjunto finito de números. Esto es, si $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ldots, f(x_n)$ es un conjunto de n números, entonces la media aritmética está dada por el cociente:

$$\frac{\sum_{K=1}^{n} f(x_K)}{n}$$

Consideremos una partición regular del intervalo cerrado $[a, b]$ que se divide en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$.

Sea ξ_K cualquier punto del K-ésimo subintervalo y fórmese la suma:

$$\frac{\sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)}{n}$$

este cociente representa la media aritmética de n números.

Como $\Delta x \frac{(b-a)}{n}$ tenemos que $n = \frac{(b-a)}{\Delta x}$; sustituyendo en el cociente, se tiene

$$\frac{\sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)}{n} = \frac{\sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)}{\frac{(b-a)}{\Delta x}} = \frac{\sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\Delta x}{(b-a)}$$

Tomando el límite cuando $n \to +\infty$ o $\Delta x \to 0$ tenemos, si el límite existe:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\Delta x}{(b-a)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$$

Lo anterior nos lleva a la siguiente conclusión:

Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, el valor promedio de f en $[a, b]$ es $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$.

EJEMPLO

1. Hallar el valor promedio de la función f definida por $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ en el intervalo cerrado $[-3,3]$.

Solución:

Del ejemplo anterior obtuvimos que: $\int_{-3}^{3} (2x^3 + 3x^2 - 12x)\, dx = 54$

El valor promedio (V.P.) de f en $[-3, 3]$ es:

$$VP = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = \frac{\int_{-3}^{3}\left(2x^3 + 3x^2 - 12x\right)dx}{[3-(-3)]} = \frac{54}{6} = 9$$

$\therefore$ **El valor promedio de la función f definida por $\int_{-3}^{3}\left(2x^3 + 3x^2 - 12x\right) dx$ en el intervalo cerrado $[-3, 3]$ es 9.**

El valor promedio de una función tiene aplicaciones en la física y la ingeniería en relación con el concepto de centro de masa; en la economía se emplea en el cálculo del costo total promedio o del ingreso total promedio. Dichas aplicaciones se analizarán más adelante.

EJERCICIO III

I. Contestar las siguientes preguntas.

1. Describir los teoremas sobre las sumas de Riemann.
2. Enunciar los teoremas que dan lugar a las propiedades de la integral definida.
3. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?
4. Escribir el teorema del valor medio.
5. ¿Qué establece el teorema del valor extremo?
6. Explicar qué es el valor medio o valor promedio de una función en un intervalo $[a, b]$.
7. Citar las aplicaciones del valor medio o valor promedio.

II. Resolver los siguientes problemas.

1. Aplicar el Teorema 7 de las propiedades de la integral definida para hallar el mayor valor y el menor valor posible de:

a) $\int_1^3 5x\,dx$ d) $\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$ g) $\int_0^4 \left(9-x^2\right)dx$

b) $\int_{-2}^1 (1+x)^{2/3}\,dx$ e) $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$ h) $\int_{-1}^2 \left(3x^4-4x^3-12x^2\right)dx$

c) $\int_0^5 x^2 dx$ f) $\int_3^6 \frac{x}{4+x^2}\,dx$ i) $\int_{-5}^2 \frac{x+7}{x-5}\,dx$

2. En los siguientes problemas se dan una función f y un intervalo [a, b]. Determinar si el teorema del valor intermedio es válido para el valor dado de K. Si dicho teorema es válido, hallar un número c tal que $f(c) = K$. Si el teorema resulta no ser válido, explicar el porqué. Construir la gráfica correspondiente de la curva y la recta $y = K$.

a) $f(x) = 4 + x - x^2;\ [0,3];\ K = 1$

b) $f(x) = \sqrt{25-x^2};\ [-4,3];\ K = 3$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x+4};[-5,-1];K = -1/2$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ x^2-1 & \text{si } \quad 1 \le x \le 3 \end{cases};[-2,3];K = -1$

e) $f(x) = x^2 + 3x - 2;[-1,2];K = 3$

f) $f(x) = 4 + 3x + x^2;[2,5];\ K = 1$

g) $f(x)=\sqrt{64-x^2}$; $[0,6]$; $K=-6$

h) $f(x)=\dfrac{7}{2x-1}$; $[0,1]$; $K=4$

3. Hallar el valor de X que satisfaga el teorema del valor medio para integrales. Construir la gráfica correspondiente de la aplicación del teorema.

a) $\int_0^2 x^3 dx$ c) $\int_{-2}^2 x^4 dx$ e) $\int_{-1}^2 (4x^3-3x^2)dx$

b) $\int_1^4 (x^2+4x+5)dx$ d) $\int_0^4 (2+x-x^2)dx$ f) $\int_{-2}^3 (x^3+1)dx$

1.4 LA INTEGRAL INDEFINIDA

Los conceptos fundamentales de la integral definida fueron empleados por los antiguos griegos, muchos años antes de que fuera descubierto el cálculo diferencial.

En el siglo XVII, casi simultáneamente pero en forma independiente, Isaac Newton y Wilhelm Leibniz trabajaron sobre la aplicación del cálculo para determinar el área de una región limitada por una curva o un conjunto de curvas. Para ello, calcularon una integral definida mediante la antidiferenciación, en cuyo proceso de solución interviene el teorema fundamental del cálculo. Para establecer y demostrar el teorema fundamental del cálculo, analizaremos las integrales definidas con un límite superior variable y un teorema preliminar.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces el valor de la integral definida $\int_b^a f(x)\,dx$ depende únicamente de la función f y de los números a y b y no de la literal x, que se denomina variable independiente. Con base en el ejemplo, $\int_0^3 x^2\,dx$, encontramos que su valor exacto es 9. Se pudo haber empleado cualquier otra literal en lugar de x; por ejemplo:

$$\int_0^3 s^2\,ds = \int_0^3 t^2 dt = \int_0^3 u^2 du = \int_0^3 v^2 dv = 9$$

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$; por la definición de la integral definida, aseguramos que $\int_b^a f(v)\,dv$ existe. Por lo anterior se establece que *si la integral definida existe, representa un valor único.* Si x es un valor numérico en $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, x]$ ya que es continua en $[a, b]$. Por consiguiente, $\int_a^x f(v)\,dv$ define una función F que tiene como dominio a todos los valores numéricos en el intervalo cerrado $[a, b]$, y cuyo valor de la función en cualquier valor numérico x en $[a, b]$ está dado por:

$$F(x) = \int_a^x f(v)\,dv$$

Es pertinente hacer notar que si los límites de la integral definida son variables, se emplean distintas literales para estos límites y para la variable independiente en el integrando. En la ecuación $F(x)=\int_a^x f(v)\ dv$, como x es el límite superior, empleamos la literal v como la variable independiente en el integrando.

Si en la ecuación $F(x)=\int_a^x f(v)\,dv$, y $f(v)\geq 0$ para todos los valores de v en $[a, b]$, entonces el valor $F(x)$ se puede interpretar geométricamente como la medida del área de la región limitada por la curva $y=f(v)$, el eje v y las rectas $v=a$ y $v=x$ (Figura 1).

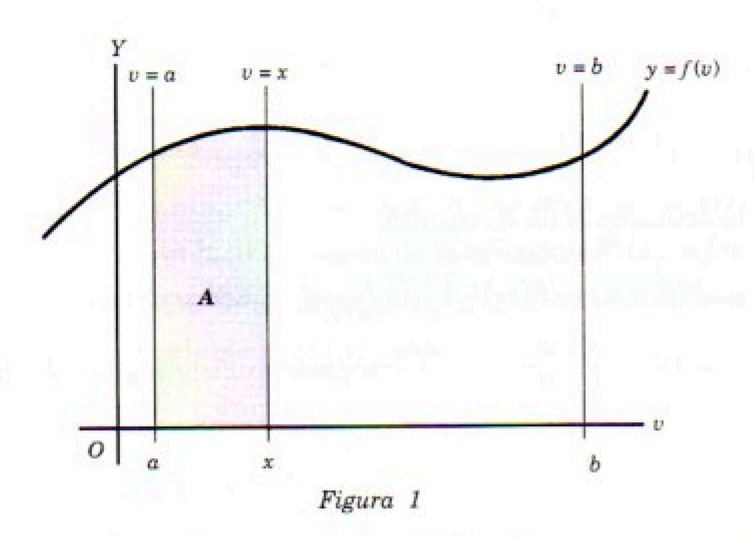


Figura 1

Con base en la Figura 1, notemos que $F(a)=\int_a^a f(v)\ dv$ es igual a cero.

Ahora estableceremos y demostraremos el teorema a que da lugar la derivada de una función F definida como una integral definida con un límite superior variable.

Teorema

Sea la función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x cualquier valor numérico en $[a, b]$. Si F es la función definida por $F(x)=\int_a^x f(v)\ dv$, entonces $F'(x)=f(x)$.

Si $x=a$, la derivada en $F'(x)=f(x)$ puede ser una derivada por la derecha; si $x=b$, la derivada en $F'(x)=f(x)$ puede ser una derivada por la izquierda.

Demostración

Considerando dos valores numéricos (x_1) y $(x_1 + \Delta x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ tenemos:

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(v)\, dv \qquad \text{y} \qquad F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(v)\, dv$$

tales que: $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(v)\, dv - \int_a^{x_1} f(v)\, dv \;\}$ ***Ecuación A***

Por el Teorema 4 que da lugar a las propiedades de la integral definida, tenemos

$$\int_a^{x_1} f(v)\, dv + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)\, dv = \int_a^{x_1+\Delta x} f(v)\, dv$$

en forma equivalente, se tiene:

$$\int_a^{x_1+\Delta x} f(v)\, dv - \int_a^{x_1} f(v)\, dv = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)\, dv \;\} \textbf{ Ecuación B}$$

sustituyendo la ecuación ***B*** en ***A***, resulta:

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)\, dv \;\} \textbf{ Ecuación C}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe algún número X en el intervalo cerrado limitado por (x_1) y $(x_1 + \Delta x)$ tal que:

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)\, dv = f(X)\Delta x \Big\} \textbf{ Ecuación D}$$

De las ecuaciones ***C*** y ***D***, obtenemos: $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(X)\,\Delta x$. Si dividimos entre Δx, resulta: $\dfrac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(X)$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(X) \Big\} \textbf{ Ecuación E}$$

El lado izquierdo de la ecuación ***E*** es $F'(x_1)$. Para hallar el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(X)$, no debe olvidarse que X está contenido en el intervalo cerrado limitado por (x_1) y $(x_1 + \Delta x)$, y como

$$\lim_{\Delta x \to 0} x_1 = x_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} (x_1 + \Delta x_1) = x_1$$

El teorema del "apretón" establece: *Supongamos que las funciones f, g y h están definidas en algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a misma, y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en I para las cuales $x \neq a$. También supongamos que el $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} h(x)$ existen y son iguales a L. Entonces $\lim_{x \to a} g(x)$ también existe y es igual a L.*

Por lo anterior, establecemos que el $\lim_{\Delta x \to 0} X = x_1$. Ya que f es continua en x_1, se tiene que: $\lim_{\Delta x \to 0} f(X) = \lim_{X \to x_1} f(X) = f(x_1)$; por lo tanto de la ecuación E, resulta: $F'(x_1) = f(x_1)$.

Si la función f no está definida para valores de x menores que a pero es continua a la derecha de a, entonces en el argumento anterior si $x_1 = a$ en la ecuación E, Δx se debe aproximar a cero por la derecha. Por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación $F'(x_1) = f(x_1)$ será $F'_+(x_1)$. De la misma manera, si f no está definida para valores de x mayores que b pero es continua a la izquierda de b, entonces, si $x = b$ en la ecuación E, Δx se debe aproximar a cero por la izquierda. Por tanto, el lado izquierdo de la ecuación $F'(x_1) = f(x_1)$ será $F'_-(x_1)$.

Por lo tanto, el teorema anterior establece que la integral definida $\int_a^x f(v)\, dv$, con límite superior variable x, es una *antiderivada* de f.

Teorema fundamental del cálculo

Sea la función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea g una función tal que: $g'(x) = f(x)$ para toda x en $[a, b]$. Entonces $\int_a^x f(v)\, dv = g(b) - g(a)$.

Si $x = a$, la derivada en $g'(x) = f(x)$ puede ser una derivada por la derecha, y si $x = b$, la derivada en $g'(x) = f(x)$ puede ser una derivada por la izquierda.

Demostración

Si f es continua en todos los números en $[a, b]$, por el teorema anteriormente establecido y demostrado, según el cual la integral definida $\int_a^x f(v)\,dv$, con límite superior variable x, define una función f cuya derivada en $[a, b]$ es f; como por hipótesis $g'(x) = f(x)$, se sigue del teorema que establece:

Si f y g son dos funciones tales que $f'(x) = g'(x)$ para todos los valores de x en el intervalo I, entonces existe una constante K tal que $f(x) = g(x) + K$ para todo x en I, y que $g(x) = \int_a^x f(v)dv + K$, donde K es cualquier constante.

Haciendo $x = b$ y $x = a$, sucesivamente en la ecuación anterior, resulta:

$$\boldsymbol{g(b) = \int_a^b f(v)dv + K} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{g(a) = \int_a^a f(v)dv + K}$$

De las ecuaciones anteriores, obtenemos: $g(b) - g(a) = \int_a^b f(v)dv - \int_a^a f(v)dv$

Por definición tenemos que $\int_a^a f(v)dv = 0$, resultando $g(b) - g(a) = \int_a^b f(v)dv$

Si f no está definida para valores de x mayores que b pero es continua a la izquierda de b, la derivada en $g'(x) = f(x)$ es una derivada por la izquierda resultando que: $g'_-(b) = F'_-(b)$, de donde se llega a $g(b) = \int_a^b f(v)dv + K$. De la misma manera, si f no está definida para valores de x menores que a pero es continua a la derecha de a, entonces la derivada en $g'(x) = f(x)$ es una derivada por la derecha y resulta que $g'_+(a) = F'_+(a)$, de donde se llega a $g(a) = \int_a^a f(v)dv + K$.

Ahora sí estamos en condiciones de hallar el valor exacto de cualquier integral definida aplicando el teorema fundamental del cálculo, en donde se hace notar la siguiente igualdad: $[g(b) - g(a)]$ por $g(x)]_a^b$.

EJEMPLO

1. Calcular la $\int_0^3 x^2\,dx$ por el teorema fundamental del cálculo.

Solución

Sea $f(x) = x^2$; la antiderivada de x^2 es $\frac{1}{3}x^3$. *

Si $g(x) = \frac{x^3}{3}$, por el teorema fundamental del cálculo, tenemos:

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = 9$$

*** El resultado de integrar x^2 *es* $\frac{1}{3}x^3$, *y* se obtiene de aplicar directamente las fórmulas de integración para integrales inmediatas elementales que se estudiarán más adelante. El alumno puede comprobar este resultado haciendo el cálculo del área como el límite de una suma de Riemann.**

La integral indefinida

De la expresión $F(x) = \int_a^x f(v)\,dv$, la función $F(x)$ se denomina *una integral indefinida* de la función $f(v)$. Decimos **una** y no **la** integral indefinida, porque en lugar de haber elegido a a como el límite inferior de integración, pudimos haber escogido otro valor constante, en cuyo caso se obtendría un valor diferente para la integral.

Es muy fácil comprobar que cualquier integral definida se encuentra, a partir de una integral indefinida $F(x)$, por la expresión:

$$\int_a^b f(v)dv = g(b) - g(a)$$

La relación anterior entre integral definida e indefinida sugiere una manera de calcular el valor de la primera a partir de la segunda.

El teorema fundamental del cálculo establece que: Una integral indefinida $F(x)$ de una función continua $f(x)$ definida por $F(x) = \int_a^x f(v)\,dv$ posee siempre una derivada $F'(x)$ y es tal que $F'(x) = f(x)$; esto es, la derivación de una integral indefinida reproduce siempre el integrando.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int f(v)dv = f(x)$$

El teorema fundamental del cálculo muestra el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración, lo cual constituye el hecho básico del cálculo. Debido a esta relación inversa **derivación-integración**, a la función $f(x)$ se le denomina *la primitiva de F (x)*, pues esta última proviene de la derivación de la primera.

A continuación veremos que la integral de una función no es única, ya que diferentes funciones primitivas pueden tener el mismo diferencial.

EJEMPLOS

$$f_1(x) = ax^2 \qquad f_2(x) = ax^2 + 3 \qquad f_3(x) = ax^2 - 7$$

$$d_1(ax^2) = 2ax\ dx \qquad d_2(ax^2 + 3) = 2ax\ dx \qquad d_3(ax^2 - 7) = 2ax\ dx$$

Si integramos cada una de las funciones diferenciables, tendríamos:

$$\int 2ax\ dx = ax^2 \qquad \int 2ax\ dx = ax^2 + 3 \qquad \int 2ax\ dx = ax^2 - 7$$

Observamos que las tres integrales difieren sólo en un valor constante, ya que conocíamos cada una de las funciones primitivas.

> ∴ **Una función $f(x)$ tiene infinitas funciones primitivas, pero dos cualesquiera de ellas, $F_1(x)$ y $F_2(x)$, difieren siempre en una constante.**

Pero ¿qué sucede si se nos plantea primeramente la expresión: $\int 2ax\ dx$?, ¿qué respuesta daremos si se comprendió que puede haber una cantidad infinita de funciones que dan lugar a esta diferencial? Con el fin de dar una respuesta clara y precisa, diremos que la $\int 2ax\ dx$ es ax^2 más un valor constante indefinido que representamos con C, es decir:

$$\int 2ax\ dx = ax^2 + C$$

Como por lo pronto no nos es posible precisar el valor de C, denominaremos a $ax^2 + C$ como la *integral indefinida de 2ax dx.*

La constante arbitraria C se llama *constante de integración* y es una cantidad independiente de la variable de integración.

En conclusión, tenemos que: $\int f'(x)dx = f(x) + C$, donde $f(x) + C$ es la integral indefinida de $f'(x)dx$.

> ∴ **Al conjunto de todas las funciones primitivas de una función $f(x)$ se le denomina integral indefinida de $f'(x)\ dx$.**

El proceso de calcular una integral definida o indefinida se denomina *integración*.

EJERCICIO IV

I. Contestar las siguientes preguntas.

1. ¿Qué representa $\int_a^x f(v)\,dv$?
2. Definir $F(x)=\int_a^x f(v)\,dv$.
3. Geométricamente el valor de la ecuación $F(x)=\int_a^x f(v)\,dv$, representa:
4. Enunciar el teorema a que da lugar la derivada de una función F definida como una integral definida con un límite superior variable.
5. Enunciar el teorema fundamental del cálculo.
6. ¿A qué se le denomina *integral indefinida*?
7. Para una integral indefinida, ¿qué establece el teorema fundamental del cálculo?
8. ¿Cuál es la función *primitiva*?
9. ¿Qué representa C?
10. ¿Cómo se llama al proceso para calcular una integral indefinida o una integral definida?

II. Resolver los siguiente problemas.

1. Hallar el área de la región acotada por la curva y rectas dadas. Construir una gráfica mostrando la región y un rectángulo. Expresar la medida del área como el límite de una suma de Riemann y luego como integral definida, para:

   a) $y=4-x^2$; el eje x; $x=0$, $x=3$

   b) $y=8x-x^2$; el eje x; $x=1$, $x=3$

   c) $y=x\sqrt{x+5}$; el eje x; $x=-1$, $x=4$

   d) $y=x^2\sqrt{x-3}$; el eje x; $x=7$, $x=12$

   e) $y=x^2-4x+5$; el eje x; $x=-2$, $x=2$

   f) $y=x^2\sqrt{x^2+4}$; el eje x; el eje y; $x=9$

   g) $y=3x\sqrt{x^2-16}$; el eje x; $x=4$, $x=6$

   h) $y=x\sqrt{x+1}$; el eje x; el eje y; $x=8$

1.5 APLICACIÓN DE LAS CINCO PRIMERAS FÓRMULAS DEL FORMULARIO GENERAL DE INTEGRALES INMEDIATAS ELEMENTALES

Integración

En el cálculo diferencial aprendimos a determinar la derivada $f'(x)$ o la diferencial $f'(x)\,dx$ de una función dada $f(x)$; en el cálculo integral se realiza la operación inversa, es decir, se encuentra una función $f(x)$ cuya derivada o diferencial es conocida.

EJEMPLO

Sea $f(x) = x^2 + 9$

$\frac{dy}{dx} = 2x \}$ *Derivada*

$dy = 2x\,dx \}$ *Diferencial*

Integración $\left\{ \int 2x\,dx = x^2 + C \right.$

$\therefore$ **La integración y la diferenciación son operaciones inversas.**

De la expresión $\int 2x\,dx = x^2 + C$, no sabemos cuál es el valor de C (constante de integración); es un valor indefinido, por lo cual denominamos a esta operación *integral indefinida*.

En la notación para la integral indefinida, identificamos:

$$\int f(x)\,(dx)$$

Símbolo de la integración ← $\int$; $f(x)$ → *Integrando*; (dx) → *Diferencial de la integral*

EJEMPLO

De la expresión $\int 2x\,dx$, tenemos que: $\int$ es el símbolo de la integral, $\mathbf{2x}$ es el integrando y $\boldsymbol{dx}$ es el diferencial de la integral cuya variable es $\boldsymbol{x}$.

Comprobación de la integración indefinida

Para verificar si el cálculo de la integral indefinida es correcto, se halla la diferencial del resultado y éste debe ser el integrando.

EJEMPLO

Sea la expresión $\int 3ay^2dy = ay^3 + C$, donde se hace notar que la diferencial de $ay^3 + C$ es $3ay^2\,dy$.

(En la expresión, $ay^3 + C$ está señalado como *Resultado* y $3ay^2dy$ como *Integrando*.)

$\therefore$ **El cálculo de la integral indefinida es correcto.**

Pasos para integrar una función

1. De la expresión por integrar se toma la variable y se obtiene su diferencial.
2. Si la diferencial resultante completa el diferencial de la integral, se aplica directamente la fórmula correspondiente.
3. Si la diferencial resultante completa el diferencial de la integral y nos sobran constantes, éstas pasan en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral.

Fórmulas para integrales inmediatas elementales

(Recuerda que las fórmulas para integrales inmediatas elementales se obtienen directamente de las fórmulas generales de diferenciación.)

[1] $\int dv = v + C$

[2] $\int a\,dv = a\int dv = av + C$

[3] $\int (dv + du - dw) = \int dv + \int du - \int dw = v + u - w + C$

[4] $\int v^n dv = \dfrac{v^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

[5] $\int \dfrac{dv}{v} = \ln v + C = \ln v + \ln C = \ln\ Cv \qquad (C = \ln C)$

EJEMPLOS

1. Calcular la $\int x^3 dx$.

Solución

Con base en los pasos para integrar una función, identificamos en la expresión dada a la variable $v = x$ y al exponente $n = 3$:

$$v = x \qquad n = 3$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$\therefore \int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{3}} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \boldsymbol{\frac{x^4}{4} + C}$$

2. Calcular la $\int 5my^2\, dy$.

Solución

En la expresión dada, identificamos que $5m$ es una constante que se encuentra como factor en el integrando $5my^2$; aplicando directamente la fórmula [2], tenemos:

$$\int \underbrace{5m}_{a} \underbrace{y^2}_{v} \underbrace{dy}_{dv} = 5m \int y^2 dy$$

Ahora, en la expresión resultante se tiene que la variable es $v = y$ y el exponente $n = 2$, es decir:

$$v = y \qquad n = 2$$
$$dv = dy$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dy$ completa el diferencial de la integral dy, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$\therefore \; 5m \int \underbrace{y}_{v}^{\overset{n}{2}} \underbrace{dy}_{dv} = 5m \left(\frac{y^{2+1}}{2+1} \right) + C = \boldsymbol{\frac{5}{3} my^3 + C}$$

3. Calcular la $\int \sqrt{3t}\; dt$.

Solución

Muchas integrales indefinidas no se pueden calcular directamente aplicando las fórmulas inmediatas elementales; sin embargo, esto es posible mediante *artificios,* es decir, con el empleo de propiedades y leyes matemáticas que facilitan la resolución de un problema.

En este caso propuesto, tenemos que ninguna de las cinco fórmulas que hasta el momento conocemos se puede aplicar directamente. Sin embargo, si pasamos el integrando $\sqrt{3t}$ de la forma *radical* a la forma *exponencial*, tenemos:

$$\int \sqrt{3t}\,dt = \int (3t)^{1/2}\,dt$$

Ahora, en la expresión resultante se tiene que la variable es $v = 3t$ y el exponente es $n = 1/2$, es decir:

$$v = 3t \qquad n = 1/2$$
$$dv = 3dt$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = 3dt$ completa el diferencial de la integral dt, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula $\boxed{4}$. Pero, con base en el paso tres para integrar una función, se hace notar que en el diferencial de la variable $3dt$ nos sobra la constante 3, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral:

$$\int \underbrace{(3t)}_{v}{}^{\overbrace{1/2+1}^{n}}\underbrace{dt}_{dv} = \frac{1}{3}\left[\frac{(3t)^{1/2+1}}{1/2+1}\right] + C = \frac{1}{3}\left[\frac{(3t)^{3/2}}{3/2}\right] + C$$

$$\therefore \int (3t)^{1/2+1}\,dt = \frac{2}{9}\sqrt{(3t)^3} + C = \frac{2(3t)}{9}\sqrt{3t} + C = \mathbf{\frac{2t\sqrt{3t}}{3} + C}$$

4. Calcular la $\int \frac{dx}{x^{2/3}}$

Solución

En el ejemplo propuesto, se hace notar que ninguna de las cinco fórmulas que hasta el momento conocemos se puede aplicar directamente. Sin embargo, si el término del denominador lo pasamos al numerador, y con base en las leyes de los exponentes tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^{2/3}} = \int x^{-2/3}\,dx$$

Ahora en la expresión resultante se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente es $n = -2/3$, es decir: $v = x$ $\quad n = -2/3$

$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula $\boxed{4}$, resultando:

$$\therefore \int \underbrace{x}_{v}{}^{\overbrace{-2/3}^{n}}\underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} + C = \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \mathbf{3\sqrt[3]{x} + C}$$

5. Calcular la $\int\left(x^4 - 3x^{3/2} + \frac{7}{\sqrt{x}} + 5\right)dx$.

Solución

Para resolver la integral de una suma algebraica (polinomios) de expresiones diferenciables, se aplica directamente la fórmula [3], resultando:

$$\int\left(\underbrace{x^4}_{du} - \underbrace{3x^{3/2}}_{du} + \underbrace{\frac{7}{\sqrt{x}}}_{dw} + \underbrace{5}_{a}\right)dx = \underset{①}{\int x^4 dx} - \underset{②}{\int 3x^{3/2} dx} + \underset{③}{\int \frac{7}{\sqrt{x}} dx} + \underset{④}{\int 5dx}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① En esta integral, identificamos la variable $v = x$ y al exponente $n = 4$, es decir:

$$v = x \qquad n = 4$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{4}} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{\boldsymbol{x^5}}{\boldsymbol{5}} + \boldsymbol{C}$$

② En esta integral, identificamos que 3 es una constante que se encuentra como factor en el integrando $3x^{3/2}$; aplicando directamente la fórmula [2], tenemos:

$$-\int \underbrace{3}_{a} \underbrace{x}_{v}^{3/2} \underbrace{dx}_{dv} = -3\int x^{3/2} dx$$

Ahora, en la expresión resultante, se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente $n = 3/2$, es decir:

$$v = x \qquad n = 3/2$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$-3\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{3/2}} \underbrace{dx}_{dv} = -3\left(\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1}\right) + C = -3\left(\frac{x^{5/2}}{5/2}\right) + C = -\frac{\boldsymbol{6x^{5/2}}}{\boldsymbol{5}} + \boldsymbol{C}$$

③ En esta integral, se hace notar que ninguna de las cinco fórmulas que hasta el momento conocemos se puede aplicar directamente. Sin embargo, pasa-

mos el denominador de la forma *radical* a la forma *exponencial*; finalmente lo pasamos al numerador y, con base en las leyes de los exponentes, tenemos:

$$\int \frac{7}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{7}{x^{1/2}}\,dx = \int 7x^{-1/2}dx$$

Enseguida, en la expresión resultante identificamos que **7** es una constante que se encuentra como factor en el integrando $\mathbf{7x^{-1/2}}$; aplicando directamente la fórmula [2], tenemos:

$$\int \underbrace{7}_{a}\,\underbrace{x^{-1/2}}_{v}\,\underbrace{dx}_{dv} = 7\int x^{-1/2}dx$$

En esta última integral, se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente $n = -1/2$, es decir:

$$v = x \qquad n = -1/2$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$7\int \underbrace{x}_{v}^{\overbrace{-1/2}^{n}}\,\underbrace{dx}_{dv} = 7\left(\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right)+C = 7\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\right)+C = \mathbf{14\sqrt{x}+C}$$

(4) En esta integral identificamos que **5** es una constante y que es el integrando de la expresión, por lo que aplicando directamente la fórmula [2] tenemos:

$$\int \underbrace{5}_{v}\,\underbrace{dx}_{dv} = 5\int dx$$

En la integral resultante, aplicamos directamente la fórmula [1], resultando:

$$5\int \underbrace{dx}_{dv} = \mathbf{5x + C}$$

Al escribir en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \int \left(x^4 - 3x^{3/2} + \frac{7}{\sqrt{x}} + 5\right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{6x^{5/2}}{5} + 14\sqrt{x} + 5x + C$$

Se hace notar que cada resultado tiene una constante, por lo que en el resultado final se escribe una sola constante, pues la suma de varias constantes es igual a otra constante.

6. Calcular la $\int \sqrt{x}\,(x-3)\,dx$.

Solución

En este caso se observa que tenemos el producto de dos funciones $u = \sqrt{x}$ y $v = (x-3)$, que conforman el integrando.

Debemos intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar el diferencial de la integral, es decir:

Si se diferencia $u = \sqrt{x}$, resulta: $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$. Se hace notar que si escogemos $u = x$ y $n = 1/2$, al diferenciar, resulta $\boldsymbol{du = dx}$. Pero el diferencial de la integral por completar debe ser $du = (x - 3)\, dx$, por lo cual se observa que no se completa dicho diferencial.

Si se diferencia $v = (x - 3)$, resulta: $\boldsymbol{dv = dx}$. Pero el diferencial de la integral por completar debe ser $dv = \sqrt{x}\, dx$, por lo cual se observa que no se completa dicho diferencial.

La integración de ciertas expresiones se puede transformar a integrales inmediatas mediante la ejecución de la operación indicada (multiplicación, división, etc.). La integral propuesta se reduce a:

$$\int \sqrt{x}(x-3)dx = \int \left(x^{3/2} - 3x^{1/2}\right)dx$$

Al aplicar directamente la fórmula [3], tenemos:

$$\int \Big(\underbrace{x^{3/2}}_{du} - \underbrace{3x^{1/2}}_{dv}\Big)\, dx = \underbrace{\int x^{3/2}dx}_{①} - \underbrace{\int 3x^{1/2}dx}_{②}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① En esta integral, identificamos la variable $v = x$ y el exponente $n = 3/2$, es decir:

$$v = x \qquad n = 3/2$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$\int \underbrace{x}_{v}^{\overbrace{3/2}^{n}} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + C = \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{\boldsymbol{2x^{5/2}}}{\boldsymbol{5}} + \boldsymbol{C}$$

② En esta integral identificamos que **3** es una constante que se encuentra como factor en el integrando $3x^{1/2}$; aplicando directamente la fórmula [2], tenemos:

$$-\int \underbrace{3}_{a}\underbrace{x^{1/2}}_{v}\underbrace{dx}_{dv} = -3\int x^{1/2}dx$$

En la expresión resultante se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente $n = 1/2$, es decir:

$$v = x \qquad n = 1/2$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$-3\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{1/2}} \underbrace{dx}_{dv} = -3\left(\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}\right) + C = -3\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right) + C = \mathbf{-2x^{3/2} + C}$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \int \sqrt{x}\ (x-3)\,dx = \frac{2x^{5/2}}{5} - 2x^{3/2} + C = 2x^{3/2}\left(\frac{x}{5} - 1\right) + C$$

7. Calcular la $\int \sqrt{x}\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx.$

Solución

Observamos que en la integral propuesta se presenta el producto de dos funciones, $u = \sqrt{x}$ y $v = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2$, que conforman el integrando. Con base en el ejemplo anterior, debemos intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar el diferencial de la integral:

Si $u = \sqrt{x}$ y si $v = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2$

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \qquad dv = \left(1 - \sqrt{\frac{a}{x}}\right) dx$$

o también:

Si $u = x \quad n = 1/2$ y si $v = \sqrt{a} - \sqrt{x} \quad n = 2$

$$du = dx \qquad dv = -\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Como en ninguno de los casos se satisface el hecho de completar el diferencial de la integral, ejecutamos la operación indicada, es decir, desarrollamos el binomio al cuadrado y multiplicamos, resultando:

$$\int \sqrt{x}\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx = \int \sqrt{x}\ \left(a - 2\sqrt{ax} + x\right) dx = \int \left(ax^{1/2} - 2\sqrt{a}x + x^{3/2}\right) dx$$

Al aplicar directamente la fórmula [3], tenemos:

$$\int\left(\underbrace{ax^{1/2}}_{du} - \underbrace{2\sqrt{a}\,x}_{dv} + \underbrace{x^{3/2}}_{dw}\right) dx = \underbrace{\int ax^{1/2} dx}_{①} - \underbrace{\int 2\sqrt{a}\ x\,dx}_{②} + \underbrace{\int x^{3/2} dx}_{③}$$

① Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual. En esta integral, identificamos que a es una constante que se encuentra como factor en el integrando $ax^{1/2}$; al aplicar directamente la fórmula [2], tenemos:

$$\int \underbrace{a}_{a}\underbrace{x^{1/2}}_{v}\underbrace{dx}_{dv} = a\int x^{1/2}dx$$

En la expresión resultante se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente $n = 1/2$:

$$v = x \qquad n = 1/2$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$a\int \underbrace{x^{\overbrace{1/2}^{n}}}_{v}\underbrace{dx}_{dv} = a\left(\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}\right) + C = a\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right) + C = \frac{\mathbf{2ax^{3/2}}}{\mathbf{3}} + \mathbf{C}$$

(2) En esta integral, identificamos que $2\sqrt{a}$ es una constante que se encuentra como factor en el integrando $2\sqrt{a}\,x$; al aplicar directamente la fórmula [2], tenemos:

$$-\int \underbrace{2\sqrt{a}}_{a}\underbrace{x}_{v}\underbrace{dx}_{dv} = -2\sqrt{a}\int x\,dx$$

En la expresión resultante se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente $n = 1$: es decir:

$$v = x \qquad n = 1$$
$$dv = dx$$

Se debe recordar que con base en las leyes o propiedades de los exponentes, se establece que cuando una literal no tiene exponente, es porque éste es la unidad.

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$-2\sqrt{a}\int \underbrace{x^{\overbrace{1}^{n}}}_{v}\underbrace{dx}_{dv} = -2\sqrt{a}\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + C = -2\sqrt{a}\left(\frac{x^{2}}{2}\right) + C = -\sqrt{\mathbf{a}}\,\mathbf{x^2} + \mathbf{C}$$

(3) En esta integral, identificamos la variable $v = x$ y el exponente $n = 3/2$, es decir:

$$v = x \qquad n = 3/2$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$\int x^{3/2}dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + C = \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{\mathbf{2x^{5/2}}}{\mathbf{5}} + \mathbf{C}$$

Al escribir en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore\ \int \sqrt{x}\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{\mathbf{2ax^{3/2}}}{\mathbf{3}} - \sqrt{\mathbf{a}}\,\mathbf{x^2} + \frac{\mathbf{2x^{5/2}}}{\mathbf{5}} + \mathbf{C}$$

8. Calcular la $\int t\sqrt{at^2 - b}\, dt$.

Solución

Se observa que en la integral propuesta se presenta el producto de dos funciones $u = t$ y $v = \sqrt{at^2 - b}$, que conforman el integrando. Con base en los ejemplos anteriores, debemos intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar el diferencial de la integral, es decir:

Si $u = t$ y si $v = \sqrt{at^2 - b}$

$du = dt$ $\quad dv = \dfrac{2at\, dt}{\sqrt{at^2 - b}}$

o también:

Si $u = t$ y si $v = at^2 - b$ $\quad n = 1/2$

$du = dt$ $\quad dv = 2at\, dt$

Se hace notar que cuando $v = at^2 - b$ y $n = 1/2$, el diferencial de la variable $dv = 2\, at\, dt$ completa el diferencial de la integral $t\, dt$, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula $\boxed{4}$. Pero también se debe observar que en el diferencial de la variable $2\, at\, dt$ nos sobra la constante $2a$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral:

$$\int t\sqrt{at^2 - b}\; dt = \int \left(at^2 - b\right)^{1/2} t\, dt = \frac{1}{2a}\left[\frac{\left(at^2 - b\right)^{1/2+1}}{1/2 + 1}\right] + C$$

$$\therefore \int t\sqrt{at^2 - b}\, dt = \frac{1}{2a}\left[\frac{\left(at^2 - b\right)^{3/2}}{3/2}\right] + C = \frac{\left(at^2 - b\right)^{3/2}}{3a} + C$$

9. Calcular la $\int \dfrac{x^3 + 4x - 3}{x}\, dx$.

Solución

En este caso podemos observar que se tiene la división de dos funciones $u = x^3 + 4x - 3$ y $v = x$, que conforman el integrando. Debemos intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar el diferencial de la integral, es decir:

Si $u = x^3 + 4x - 3$ y si $v = x$

$du = \left(3x^2 + 4\right)dx$ $\quad dv = dx$

Como en ninguno de los casos se satisface el hecho de completar el diferencial de la integral, ejecutamos la operación indicada, es decir:

$$\begin{array}{r} x^2+4 \\ x\,\overline{)\,x^3+4x-3} \\ \underline{-x^3\qquad\quad} \\ 4x-3 \\ \underline{-4x\quad} \\ -3 \end{array} \qquad \therefore\ \boldsymbol{x^2+4-\frac{3}{x}}$$

Ahora, la integral se presenta de la siguiente forma:

$$\int \frac{x^3+4x-3}{x}\,dx = \int\left(x^2+4-\frac{3}{x}\right)dx$$

Al aplicar directamente la fórmula [3], tenemos:

$$\int\left(\underbrace{x^2}_{du}+\underbrace{4}_{dv}-\underbrace{\frac{3}{x}}_{dw}\right)dx = \underset{①}{\int x^2\,dx} + \underset{②}{\int 4\,dx} - \underset{③}{\int \frac{3}{x}\,dx}$$

Esta integral también se puede resolver dividiendo término a término por el divisor y aplicando directamente la fórmula [3], es decir:

$$\int \frac{x^3+4x-3}{x}\,dx = \int \frac{x^3}{x}\,dx + \int \frac{4x}{x}\,dx - \int \frac{3}{x}\,dx$$

$$\int \frac{x^3+4x-3}{x}\,dx = \underset{①}{\int x^2dx} + \underset{②}{\int 4\,dx} - \underset{③}{\int \frac{3}{x}dx}$$

Enseguida integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① En esta integral, identificamos la variable $v = x$ y el exponente $n = 2$, es decir:

$$v = x \qquad\qquad n = 2$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{2}}\,\underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^{2+1}}{2+1}+C = \boldsymbol{\frac{x^3}{3}+C}$$

② En esta integral identificamos que 4 es una constante y que es el integrando de la expresión, por lo que, aplicando directamente la fórmula [2], tenemos:

$$\int \underbrace{4}_{a}\,\underbrace{dx}_{dv} = 4\int dx$$

Si aplicamos directamente la fórmula [1], resulta:

$$4\int \underbrace{dx}_{dv} = \mathbf{4x + C}$$

(3) En esta integral, identificamos que 3 es una constante que se encuentra como *dividendo* en el integrando $\frac{3}{x}$; al aplicar esto directamente en la fórmula [2], tenemos:

$$-\int \frac{\overset{a}{3}}{\underset{v}{x}} \underbrace{dx}_{dv} = -3\int \frac{dx}{x}$$

En la expresión resultante, identificamos que la variable $v = x$ se encuentra en el denominador y como:

$$v = x$$

$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [5], resultando:

$$-3\int \frac{\overset{dv}{dx}}{\underset{v}{x}} = \mathbf{-3\ln x + C}$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \int \frac{\mathbf{x^3 + 4x - 3}}{\mathbf{x}}\, \mathbf{dx} = \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3}} + \mathbf{4x - 3\ln x + C}$$

10. Calcular la $\int \frac{(s+4)ds}{2s+3}$.

Solución

Se observa que en la integral propuesta se presenta la división de dos funciones, $u = s + 4$ y $v = 2s + 3$, que conforman el integrando. Debemos intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar el diferencial de la integral, es decir:

Si	$u = s + 4$	y	si	$v = 2s + 3$
	$\mathbf{du = ds}$			$\mathbf{dv = 2ds}$

Como en ninguno de los casos se satisface el hecho de completar el diferencial de la integral, ejecutamos la operación indicada, es decir:

$$\begin{array}{r|l} & 1/2 \\ 2s+3 & s + 4 \\ & -s - 3/2 \\ \hline & 5/2 \end{array} \qquad \therefore \; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{5/2}}{\mathbf{2s+3}}$$

Ahora, la integral se presenta de la siguiente forma:

$$\int \frac{(s+4)\,ds}{2s+3} = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{5/2}{2s+3} \right) ds$$

Al aplicar directamente la fórmula [3], tenemos:

$$\int \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{du} + \underbrace{\frac{5/2}{2s+3}}_{dv} \right) ds = \underset{①}{\int \frac{1}{2}\,ds} + \underset{②}{\int \frac{5/2}{2s+3}\,ds}$$

Ahora integramos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① En esta integral, identificamos que 1/2 es una constante y que es el integrando de la expresión, por lo que, al aplicar directamente la fórmula [2], tenemos:

$$\int \underbrace{\frac{1}{2}}_{a} \underbrace{ds}_{dv} = \frac{1}{2} \int ds$$

Aplicando directamente la fórmula [1], resulta: $\frac{1}{2} \int \underbrace{ds}_{dv} = \mathbf{\frac{s}{2} + C}$

② En esta integral identificamos que 5/2 es una constante que se encuentra como *dividendo* en el integrando $\frac{5/2}{2s+3}$; aplicando directamente la fórmula [2], tenemos:

$$\int \underbrace{\frac{\overbrace{5/2}^{a}}{2s+3}}_{v} \underbrace{ds}_{dv} = \frac{5}{2} \int \frac{ds}{2s+3}$$

En la expresión resultante, identificamos que la variable $v = 2s + 3$ se encuentra en el denominador, y como:

$$v = 2s + 3$$
$$dv = 2ds$$

se hace notar que el diferencial de la variable $dv = 2ds$ completa el diferencial de la integral ds, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [5]. Pero también se debe observar que en el diferencial de la variable $2ds$ nos sobra la constante 2, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\frac{5}{2} \int \frac{\overbrace{ds}^{dv}}{\underbrace{2s+3}_{v}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)[\ln(2s+3)] + C = \mathbf{\frac{5\ln(2s+3)}{4} + C}$$

Si escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \int \frac{(s+4)ds}{2s+3} = \frac{s}{2} + \frac{5\ln(2s+3)}{4} + C$$

11. Calcular la $\int \frac{(a + \ln x)dx}{x}$

Solución

Se observa que en la integral propuesta se presenta la división de dos funciones $u = (a + \ln x)$ y $v = x$ que conforman el integrando. Debemos intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar el diferencial de la integral:

$$\text{Si} \quad u = (a + \ln x) \qquad \text{y} \qquad \text{si} \quad v = x$$
$$du = \frac{dx}{x} \qquad\qquad dv = dx$$

Notemos que cuando $u = (a + \ln x)$ y considerando como exponente $n = 1$, el diferencial de la variable $du = \frac{dx}{x}$ completa el diferencial de la integral $\frac{dx}{x}$, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [4]:

$$\therefore \int \frac{(a + \ln x)dx}{x} = \int \underbrace{(a + \ln x)}_{v}^{\overset{n}{1}} \underbrace{\frac{dx}{x}}_{dv} = \frac{(a + \ln x)^{1+1}}{1+1} + C = \frac{(a + \ln x)^2}{2} + C$$

12. Calcular la $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos ax\, dx$.

Solución

En este caso se observa que tenemos el producto de dos funciones, $u = \operatorname{sen}^2 a x$ y $v = \cos ax$, que conforman el integrando. Debemos intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar el diferencial de la integral:

$$\text{Si} \quad u = \operatorname{sen}^2 ax = (sen\ ax)^2 \qquad \text{y} \qquad \text{si} \quad v = \cos ax$$
$$du = 2a \operatorname{sen} ax\, dx \qquad\qquad dv = -a \operatorname{sen} ax\, dx$$

También:

$$\text{Si} \quad u = \operatorname{sen} ax \qquad n = 2$$
$$du = a \cos ax\, dx$$

Se hace notar que cuando $u = \operatorname{sen} ax$ y $n = 2$, el diferencial de la variable $du = a \cos ax\, dx$ completa el diferencial de la integral $\cos ax\, dx$, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [4]. Pero también, se debe observar que en el diferencial de la variable $a \cos ax\, dx$ nos sobra la constante a, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral:

$$\therefore \int \underbrace{sen^{\overset{n}{2}}\, ax}_{v} \underbrace{\cos ax\, dx}_{dv} = \frac{1}{a}\left[\frac{(sen\ ax)^{2+1}}{2+1}\right] + C = \frac{sen^3\, ax}{3a} + C$$

13. Calcular la $\int\left(\frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^2 dx$.

Solución

Por las propiedades o leyes de los exponentes, la integral propuesta se puede escribir de la siguiente forma:

$$\int\left(\frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^2 dx = \int\frac{(\sec x)^2 dx}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \int\frac{\sec^2 x\, dx}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$$

Se hace notar que, directamente, ninguna de las cinco fórmulas que hasta el momento conocemos, se pueden aplicar. Sin embargo, si el término del denominador lo pasamos al numerador y con base a las leyes de los exponentes, tenemos:

$$\int\frac{\sec^2 x\, dx}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \int(1+\operatorname{tg} x)^2 \sec^2 x\, dx$$

En la expresión resultante, se tiene que la variable es $v = 1+\operatorname{tg}x$ y el exponente es $n = -2$, es decir:

$$\text{Si} \qquad v = 1+\operatorname{tg} x \qquad\qquad n = -2$$
$$dv = \sec^2 x\, dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = \sec^2 x\, dx$ completa el diferencial de la integral $\sec^2 x\, dx$, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$\therefore \int \underbrace{(1+\operatorname{tg} x)}_{v}^{\overset{n}{-2}} \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{dv} = \frac{(1+\operatorname{tg} x)^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + C$$

14. Calcular la $\int\frac{e^\theta d\theta}{a+be^\theta}$.

Solución

Se observa que en la integral propuesta se presenta la división de dos funciones $u = e^\theta$ y $v = a+be^\theta$ que conforman el integrando. Debemos intentar diferenciar *cualquiera de ellas para tratar de completar el diferencial de la integral:*

$$\text{Si} \qquad u = e^\theta \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \text{si} \qquad v = a+be^\theta$$
$$\boldsymbol{du = e^2\, d\theta} \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{dv = be^\theta\, d\theta}$$

Se hace notar que el diferencial de la variable $dv = be^\theta d\theta$ completa el diferencial de la integral $e^\theta d\theta$, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [5]. Pero también se debe observar que en el diferencial

de la variable $be^{\theta}d\theta$ nos sobra la constante b, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \frac{e^{\theta}d\theta}{a+be^{\theta}} = \frac{1}{b}\left[\ln\left(a+be^{\theta}\right)\right]+C = \frac{\ln\left(a+be^{\theta}\right)}{b}+C$$

EJERCICIOS V

I. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando las cinco primeras fórmulas del formulario general de integrales inmediatas elementales.

1. $\int x^5dx = \frac{x^6}{6}+C$

2. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta}} = -2\sqrt{1-\theta}+C$

3. $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{x^2}+C$

4. $\int \frac{t^2}{\sqrt{t^3-1}}\,dt = \frac{2\sqrt{t^3-1}}{3}+C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax}} = 2\sqrt{\frac{x}{a}}+C$

6. $\int x\sqrt{ax^2+b}\,dx = \frac{\left(ax^2+b\right)^{3/2}}{3a}+C$

7. $\int \frac{5dx}{x^2} = -\frac{5}{x}+C$

8. $\int z(1+2z)^2dz = \frac{z^2}{2}+\frac{4z^3}{3}+z^4+C$

9. $\int \sqrt[3]{2t}\,dt = \frac{3t\sqrt[3]{2t}}{4}+C$

10. $\int \frac{a^2x^2dx}{\sqrt{x^3+a}} = \frac{2a^2\sqrt{x^3+a}}{3}+C$

11. $\int \frac{6x^3-3\sqrt[3]{x}}{x}\,dx = 2x^3-9\sqrt[3]{x}+C$

12. $\int\left(\frac{z^2}{3}-\frac{3}{z^2}\right)dz = \frac{z^3}{9}+\frac{3}{z}+C$

13. $\int \sqrt{1+3y}\;dy = \frac{2(1+3y)^{3/2}}{9}+C$

14. $\int \frac{4s\,ds}{\left(1-2s^2\right)^2} = \frac{1}{1-2s^2}+C$

15. $\int mx^3dx = \frac{mx^4}{4}+C$

16. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{16+x^4}} = \frac{\sqrt{16+x^4}}{2}+C$

17. $\int \frac{dx}{x} = \ln x+C$

18. $\int \frac{dt}{(a+bt)^3} = -\frac{1}{2b(a+bt)^2}+C$

19. $\int \frac{x^4 dx}{ab} = \frac{x^5}{5ab} + C$

20. $\int \frac{(2x-5)\,dx}{\sqrt{x^2-5x}} = 2\sqrt{x^2-5x} + C$

21. $\int \frac{2a\,dx}{\sqrt{x}} = 4a\sqrt{x} + C$

22. $\int \frac{\left(x^2+2\right)dx}{\sqrt{x^3+6x}} = -\frac{2\sqrt{x^3+6x}}{3} + C$

23. $\int b^2\, y\, dy = \frac{b^2 y^2}{2} + C$

24. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} + C$

25. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{\sqrt{1-\cos 2x}} = \sqrt{1-\cos 2x} + C$

26. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{2+4\operatorname{tg} x} = \frac{1}{4}\ln\left(2+4\operatorname{tg} x\right) + C$

27. $\int \left(\frac{\csc x}{1+\operatorname{ctg} x}\right)^2 = \frac{1}{1+\operatorname{ctg} x} + C$

28. $\int \frac{\csc x \operatorname{ctg} x\, dx}{1-\csc x} = \ln\left(1-\csc x\right) + C$

29. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\operatorname{verso} x} = \ln\left(1+\operatorname{verso} x\right) + C$

30. $\int \frac{(3x-2)dx}{x+1} = 3x - 5\ln\left(x+1\right) + C$

31. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{\ln(a+bx)}{b} + C$

32. $\int \frac{xe^{x^2}\,dx}{e^{x^2}+5} = \frac{\ln\left(e^{x^2}+5\right)}{2} + C$

33. $\int \frac{3x^2 dx}{7+x^3} = \ln\left(7+x^3\right) + C$

34. $\int \frac{ae^x-b}{ae^x+b}\,dx = 2\ln\left(ae^x+b\right) - x + C$

35. $\int \frac{\left(2+3x^2\right)dx}{2x+x^3} = \ln\left(2x+x^3\right) + C$

36. $\int \frac{z\,dz}{1+z^2} = \frac{\ln\left(1+z^2\right)}{2} + C$

37. $\int \frac{(x+3)dx}{x^2+6x} = \frac{\ln\left(x^2+6x\right)}{2} + C$

38. $\int \frac{e^x dx}{e^x-2} = \ln\left(e^x-2\right) + C$

39. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\operatorname{sen} x} = \ln\left(1+\operatorname{sen} x\right) + C$

40. $\int \frac{\left(x^{a-1}+2\right)dx}{x^a+2ax} = \frac{\ln\left(x^a+2ax\right)}{a} + C$

41. $\int (3x+4)^3 dx = \frac{(3x+4)^4}{12} + C$

42. $\int \operatorname{sen} mx \cos^2 mx\, dx = -\frac{\cos^3 mx}{3m} + C$

43. $\int x\left(3-x^2\right)^2 dx = -\frac{\left(3-x^2\right)^3}{6} + C$

44. $\int \operatorname{tg}\frac{x}{a}\sec^2\frac{x}{a}\,dx = \frac{a\operatorname{tg}^2\frac{x}{a}}{2} + C$

45. $\int \frac{2x\,dx}{4x^2-1} = \frac{\ln\left(4x^2-1\right)}{4} + C$

46. $\int \frac{(x+7/3)\,dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\left[x + 2\ln(3x+1)\right] + C$

47. $\int \left(ax^2 - bx + c\right)dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + cx + C$

48. $\int \left(x^3 - 6x + \frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + 10\sqrt{x} + C$

49. $\int \sqrt{t}\,(3t+2)\,dt = \frac{6t^{5/2}}{5} + \frac{4t^{3/2}}{3} + C$

50. $\int \frac{x^2+5x-4}{x}\,dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 4\ln x + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \left(x^{5/3} - 3x^{3/2} + 7\sqrt{x} - 5\right)dx$

2. $\int \frac{\left(e^x + a\cos ax\right)dx}{\sqrt{e^x + \operatorname{sen} ax}}$

3. $\int \sqrt{x}\,(3x-2)\,dx$

4. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\ sen} x}{1-x^2}}\,dx$

5. $\int \frac{4x^2\,dx}{\sqrt{x^3+8}}$

6. $\int \left(\frac{x^2}{a} - \frac{a}{x^2}\right)dx$

7. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+6x}$

8. $\int \operatorname{sen}^4 3x \cos 3x\,dx$

9. $\int \frac{\csc^2 ax\,dx}{a - b\operatorname{ctg} ax}$

10. $\int \frac{2\,dx}{1+3x}$

11. $\int \ln\left(1-\sqrt{x}\right)dx$

12. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

13. $\int \ln e^{2x} dx$

14. $\int \sqrt{\frac{\text{arc sen } x}{1-x^2}}\, dx$

15. $\int \sqrt{x}\,(a-x)^2 dx$

16. $\int \frac{x\,dx}{9+x^2}$

17. $\int \left(x^{3/2} - 2x^{2/3} + 5\sqrt{x} - 3\right) dx$

18. $\int \sqrt{x}\left(4 - x^{3/2}\right)^3 dx$

19. $\int \frac{\ln mx\,dx}{x}$

20. $\int \text{sen } ax \sqrt{1 + 2\cos ax}\, dx$

21. $\int \frac{dx}{x \ln ax}$

22. $\int \text{ctg } x\,(\ln \text{sen } x)\, dx$

23. $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$

24. $\int \sqrt{\frac{\text{arc cos } x}{1-x^2}}\, dx$

25. $\int \frac{dx}{x\,(\ln x)^2}$

26. $\int \frac{\sec x \text{ tg } x\,dx}{a + \sec x}$

27. $\int \frac{e^{-2x} dx}{5 - e^{-2x}}$

28. $\int \frac{dx}{\ln(a-x)}$

29. $\int \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)^2 dx$

30. $\int \frac{dx}{\ln(x-2)}$

31. $\int \frac{\left(e^x - \cos x\right) dx}{e^x - \text{sen } x}$

32. $\int \frac{x\;\,dx}{3-x}$

33. $\int \text{tg } x\,(\ln \cos x)\, dx$

34. $\int \frac{e^{ax}\,dx}{\sqrt{e^{ax} - 9}}$

35. $\int \frac{\text{arc tg } 2x\,dx}{1+4x^2}$

36. $\int \frac{\text{arc ctg } 3x\,dx}{1+9x^2}$

1.6 APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS 6 Y 7 DEL FORMULARIO GENERAL DE INTEGRALES INMEDIATAS ELEMENTALES*

Fórmulas para integrar funciones exponenciales:

$\boxed{6}\ \int a^v dv = \dfrac{a^v}{\ln a} + C$ $\qquad\qquad$ $\boxed{7}\ \int e^v dv = e^v + C$

EJEMPLOS

1. Calcular la $\int a^{my} dy$.

Solución

Con base en los pasos para integrar una función, identificamos en la expresión dada la variable $v = my$ que se encuentra como exponente en el integrando a^{my}.

$$\text{Si} \quad v = my$$
$$dv = m\,dy$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = m\,dy$ completa el diferencial de la integral dy, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula $\boxed{6}$. Pero, con base en el paso tres para integrar una función, se hace notar que en el diferencial de la variable $m\,dy$ nos sobra la constante m, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \underbrace{a}_{a}^{\overset{v}{\boxed{my}}} \underbrace{dy}_{dv} = \frac{1}{m}\left(\frac{a^{my}}{\ln a}\right) + C = \frac{a^{my}}{m \ln a} + C$$

2. Calcular la $\int \dfrac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}}$

*** Las fórmulas para integrales inmediatas elementales se obtienen directamente de las fórmulas generales de diferenciación.**

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula $\boxed{7}$, donde identificamos que la variable es:

$$v = \sqrt{t}$$

$$dv = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ completa el diferencial de la integral $\frac{dt}{\sqrt{t}}$, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula $\boxed{7}$. Pero notemos que en el diferencial de la variable $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ nos sobra la constante $\frac{1}{2}$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \frac{e^{\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}} = \int \underbrace{e}_{e}^{\overbrace{\sqrt{t}}^{v}} \underbrace{\frac{dt}{\sqrt{t}}}_{dv} = 2e^{\sqrt{t}} + C$$

3. Calcular la $\int 5^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$.

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula $\boxed{6}$, donde identificamos que la variable es:

$$v = \operatorname{sen} x$$
$$dv = \cos x \, dx$$

Se hace notar que el diferencial de la variable $dv = \cos x \, dx$ completa el diferencial de la integral $\cos x \, dx$, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula $\boxed{6}$, resultando:

$$\therefore \int \underbrace{5}_{a}^{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{v}} \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = \frac{5^{\operatorname{sen} x}}{\ln 5} + C$$

4. Calcular la $\int 3\sqrt{e^x} \, dx$.

Solución

En esta integral identificamos que **3** es una constante que se encuentra como factor en el integrando $\int 3\,\sqrt{e^x}\,dx$; aplicando directamente la fórmula [2], tenemos:

$$\int \underbrace{3}_{a}\,\underbrace{\sqrt{e^x}}_{v}\,\underbrace{dx}_{dv} = 3\int \sqrt{e^x}\,dx$$

Ahora, en la expresión resultante, el nuevo integrando $\sqrt{e^x}$ lo pasamos de la forma *radical* a la forma *exponencial*, y tenemos:

$$3\int \sqrt{e^x}\,dx = 3\int \left(e^x\right)^{1/2} dx = 3\int e^{x/2} dx$$

La integral resultante se parece a la fórmula [7], donde identificamos que la variable es:

$$v = \frac{x}{2}$$

$$dv = \frac{dx}{2}$$

Se hace notar que el diferencial de la variable $dv = \dfrac{dx}{2}$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [7]. Pero observemos que en el diferencial de la variable $\dfrac{dx}{2}$ nos sobra la constante $\dfrac{1}{2}$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \mathbf{3}\sqrt{e^x}\,d\mathbf{x} = \mathbf{3}\int \underbrace{e}_{e}^{\overbrace{\frac{x}{2}}^{v}} \underbrace{dx}_{dv} = \mathbf{2(3)}\left(e^{\frac{x}{2}}\right) + \mathbf{C} = \mathbf{6}\sqrt{e^x} + \mathbf{C}$$

5. Calcular la $\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$.

Solución

En el ejemplo propuesto se hace notar que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos se puede aplicar directamente. Sin embargo, mediante la ejecución de la operación indicada (desarrollo del binomio al cuadrado), tenemos:

$$\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx = \int \left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) dx = \int \left(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}\right) dx = \int \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) dx$$

Aplicamos directamente la fórmula [3], y tenemos:

$$\int(\underbrace{e^{2x}}_{dv}+\underbrace{2}_{du}+\underbrace{e^{-2x}}_{dw})^2dx=\int e^{2x}dx+\int 2\,dx+\int e^{-2x}dx$$

① ② ③

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① **En esta integral identificamos que la variable es:**

$$v = 2x$$
$$dv = 2dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = 2dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [7]. Pero notemos que en el diferencial de la variable $2dx$ nos sobra la constante 2, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\int \underbrace{e^{\overbrace{2x}^{v}}}_{e}\underbrace{dx}_{dv}=\frac{1}{2}(e^{2x})+C=\frac{\mathbf{e^{2x}}}{\mathbf{2}}+\mathbf{C}$$

② **En esta integral identificamos que 2 es una constante y que es el integrando de la expresión, por lo que aplicamos directamente la fórmula [2], y tenemos:**

$$\int\underbrace{2}_{a}\underbrace{dx}_{dv}=2\int dx$$

Aplicando directamente la fórmula [1], resulta: $2\int\underbrace{dx}_{dv}=\mathbf{2x+C}$

③ **En esta integral identificamos que la variable es:**

$$v = -2x$$
$$dv = -2dx$$

Observemos que el diferencial de la variable $dv = -2dx$ **completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual podemos aplicar directamente la fórmula [7]. Pero notemos que en el diferencial de la variable $-2dx$ nos sobra la constante -2, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral:**

$$\int \underbrace{e^{\overbrace{-2x}^{v}}}_{e}\underbrace{dx}_{dv}=-\frac{1}{2}(e^{-2x})+C=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2e^{2x}}}+\mathbf{C}$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral tenemos que:

$$\therefore\int(\mathbf{e^x+e^{-x}})^2\,\mathbf{dx}=\frac{\mathbf{e^{2x}}}{\mathbf{2}}+\mathbf{2x}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2e^{2x}}}+\mathbf{C}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{e^{2x}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e^{2x}}}\right)+\mathbf{2x+C}$$

6. Calcular la $\int \left(\frac{1-4^{2x}}{4^{2x}} \right) dx$.

Solución

En el ejemplo propuesto se hace notar que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos se puede aplicar directamente. Sin embargo, mediante la ejecución de la operación indicada –división–, tenemos:

$$\int \left(\frac{1-4^{2x}}{4^{2x}} \right) dx = \int \left(\frac{1}{4^{2x}} - \frac{4^{2x}}{4^{2x}} \right) dx = \int \left(\frac{1}{4^{2x}} - 1 \right) dx$$

Aplicamos directamente la fórmula $\boxed{3}$, y tenemos:

$$\int \left(\frac{1}{4^{2x}} - 1 \right) dx = \underset{①}{\int \frac{1}{4^{2x}}\, dx} - \underset{②}{\int dx}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① En esta integral, notemos que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos puede aplicarse directamente. Sin embargo, si pasamos el denominador al numerador, y con base en las leyes de los exponentes, tenemos:

$$\int \frac{1}{4^{2x}}\, dx = \int 4^{-2x}\, dx$$

En la expresión resultante, identificamos que la variable es: $v = -2x$
$dv = -2dx$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = -2dx$ completa el diferencial de la integral dx, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula $\boxed{6}$. Pero notemos que en el diferencial de la variable $-2dx$ nos sobra la constante -2, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\int \underset{a}{4}^{\overset{v}{\overbrace{-2x}}} \underset{dv}{\underline{dx}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4^{-2x}}{\ln 4} \right) + C = -\frac{1}{2\left(4^{2x} \ln 4\right)} + C$$

② Resolviendo directamente por la fórmula $\boxed{1}$, resulta: $-\int \underset{dv}{\underline{dx}} = -x + C$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos que:

$$\therefore \int \left(\frac{1-4^{2x}}{4^{2x}} \right) dx = -\frac{1}{2\left(4^{2x} \ln 4\right)} - x + C = -\left[\frac{1}{2\left(4^{2x} \ln 4\right)} + x \right] + C$$

7. Calcular la $\int a^\theta e^\theta d\theta$.

Solución

La integral propuesta presenta el producto de dos funciones a^θ y e^θ, que conforman el integrando. Al diferenciar cualquiera de ellas notamos que ninguna completa el diferencial de la integral.

Dado que no tenemos fórmula directa por aplicar, haremos uso de *artificios* matemáticos que facilitan la solución de la integral.

La integral propuesta, por medio de las leyes o propiedades de los exponentes, se transforma en:

$$\int a^\theta e^\theta d\theta = \int (ae)^\theta d\theta$$

La expresión resultante es similar a la fórmula $\boxed{6}$, donde identificamos que la variable es:

$$v = \theta$$
$$dv = d\theta$$

Notemos que el diferencial de la variable $dv = d\theta$ completa el diferencial de la integral $d\theta$, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula $\boxed{6}$, resultando:

$$\int \underbrace{(ae)}_{a}^{\overbrace{\theta}^{v}} \underbrace{d\theta}_{dv} = \frac{(ae)^\theta}{\ln ae} + C = \frac{\boldsymbol{a^\theta e^\theta}}{\boldsymbol{\ln ae}} + \boldsymbol{C}$$

Por las leyes o propiedades de los logaritmos, el resultado de la integral propuesta se transforma en:

$$\frac{a^\theta e^\theta}{\ln ae} + C = \frac{a^\theta e^\theta}{\ln a + \ln e} + C$$

Dado que $\ln e = 1$, el resultado se expresa como:

$$\frac{a^\theta e^\theta}{\ln a + \ln e} + C = \frac{a^\theta e^\theta}{\ln a + 1} + C$$

Por lo anterior, tenemos que:

$$\therefore \int \boldsymbol{a^\theta e^\theta d\theta} = \frac{\boldsymbol{a^\theta e^\theta}}{\boldsymbol{\ln ae}} + \boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{a^\theta e^\theta}}{\boldsymbol{\ln a + 1}} + \boldsymbol{C}$$

EJERCICIO VI

I. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando las fórmulas 6 y 7 del formulario general de integrales inmediatas elementales.

1. $\int 5^{2x} dx = \frac{5^{2x}}{2 \ln 5} + C$

2. $\int a^{2x} e^{2x} dx = \frac{a^{2x} e^{2x}}{2(\ln a + 1)} + C$

3. $\int \sqrt[n]{e^x}\, dx = n \sqrt[n]{e^x} + C$

4. $\int \left(e^{3x} + a^{3x}\right) dx = \frac{1}{3}\left(e^{3x} + \frac{a^{3x}}{\ln a}\right) + C$

5. $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$

6. $\int a e^{7x} dx = \frac{a e^{7x}}{7} + C$

7. $\int 7^x\, dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

8. $\int s\, 10^{s^2} ds = \frac{10^{s^2}}{2 \ln 10} + C$

9. $\int \frac{dx}{e^{ax}} = -\frac{1}{a e^{ax}} + C$

10. $\int \frac{d\theta}{a^{2\theta}} = -\frac{1}{2a^{2\theta} \ln a} + C$

11. $\int b a^x dx = \frac{b a^x}{\ln a} + C$

12. $\int \left(e^{2x}\right)^2 dx = \frac{e^{4x}}{4} + C$

13. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{e^{\cos x}} = \frac{1}{e^{\cos x}} + C$

14. $\int \left(\frac{e^x + 2}{e^x}\right) dx = x - \frac{2}{e^x} + C$

15. $\int a^{\operatorname{tg}\theta} \sec^2 \theta\, d\theta = \frac{a^{\operatorname{tg}\theta}}{\ln a} + C$

16. $\int \frac{e^{\sqrt{t}} + 5}{\sqrt{t}}\, dt = 2e^{\sqrt{t}} + 10\sqrt{t} + C$

17. $\int e^{\operatorname{ctg} x} \csc^2 x\, dx = -e^{\operatorname{ctg} x} + C$

18. $\int m^{bx} dx = \frac{m^{dx}}{b \ln m} + C$

19. $\int \frac{a^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} = \frac{2a^{\sqrt{x}}}{\ln a} + C$

20. $\int 8x^3 e^{-x^4} dx = -\frac{2}{e^{x^4}} + C$

21. $\int x\left(a^{x^2} + b\right) dx = \frac{a^{x^2}}{2 \ln a} + \frac{b^{x^2}}{2} + C$

22. $\int e^{\sec x} \sec x \operatorname{tg} x\, dx = e^{\sec x} + C$

23. $\int \frac{10\, dx}{5^{3x}} = -\frac{10}{3\left(5^{3x} \ln 5\right)} + C$

24. $\int \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) dx = m\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) + C$

25. $\int \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 dx = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right) - 2x + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int e^{-2x} dx$

2. $\int x\left(e^{x^2} + 2\right) dx$

3. $\int 10^{-ax} dx$

4. $\int \frac{4dx}{\sqrt{a^x}}$

5. $\int \sqrt{\frac{e^{-x}}{2}}\, dx$

6. $\int x^2 e^{2x^3} dx$

7. $\int \frac{e^{2 \ln x}}{x} dx$

8. $\int e^{\frac{5x}{3}} dx$

9. $\int \sqrt{\frac{2}{e^{-x}}}\, dx$

10. $\int \frac{x^2 dx}{8^{x^3}}$

11. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 3}}$

12. $\int b^{\left(4x^2-2x\right)}(2x - 1)\, dx$

13. $\int \sec^2 x\, e^{tg\, x} dx$

14. $\int a^{\operatorname{sen} 3x^2} x \cos 3x^2\, dx$

15. $\int e^{tg\, ax} \csc^2 ax\, dx$

16. $\int \frac{3^{ax}}{5^{ax}}\, dx$

17. $\int \sqrt{3^x}\, dy$

18. $\int e^{\left(ax^2 + bx + c\right)}(2a\, x + b)\, dx$

19. $\int \left(e^{ax} - e^{-ax}\right)^2 dx$

20. $\int \left(e^x - 1\right)^2 dx$

1.7 APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS 8 A LA 17 DEL FORMULARIO GENERAL DE INTEGRALES INMEDIATAS ELEMENTALES*

Las siguientes son fórmulas para integrar funciones trigonométricas directas:

8 $\int \operatorname{sen} v\, dv = -\cos v + C$	13 $\int \csc v \operatorname{ctg} v\, dv = -\csc v + C$
9 $\int \cos v\, dv = \operatorname{sen} v + C$	14 $\int \operatorname{tg} v\, dv = -\ln \cos v + C = \ln \sec v + C$
10 $\int \sec^2 v\, dv = \operatorname{tg} v + C$	15 $\int \operatorname{ctg} v\, dv = \ln \operatorname{sen} v + C$
11 $\int \csc^2 v\, dv = -\operatorname{ctg} v + C$	16 $\int \sec v\, dv = \ln(\sec v + \operatorname{tg} v) + C$
12 $\int \sec v \operatorname{tg} v\, dv = \sec v + C$	17 $\int \csc v\, dv = \ln(\csc v - \operatorname{ctg} v) + C = \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} + C$

EJEMPLOS

1. Calcular la $\int \operatorname{sen} ax\, dx$.

Solución

Con base en los pasos para integrar una función identificamos, en la expresión dada, la variable $v = ax$, que es el ángulo del integrando sen ax.

Si $v = ax$

$$dv = a\, dx$$

Observamos que el diferencial de la variable $dv = a\, dx$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula 8. Pero, con base en el paso tres para integrar una función, notamos que en el diferencial de la variable $a\, dx$ nos sobra la constante a, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \underbrace{\operatorname{sen}}_{\text{sen}} \underbrace{ax}_{v} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{1}{a}(-\cos ax) + C = -\frac{\cos ax}{a} + C$$

* **Las fórmulas para integrales inmediatas elementales se obtienen directamente de las fórmulas generales de diferenciación.**

2. Calcular la $\int \cos \frac{x}{2} dx$.

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula [9], donde identificamos que la variable es:

$$v = \frac{x}{2}$$
$$dv = \frac{dx}{2}$$

Observamos que el diferencial de la variable $dv = \frac{dx}{2}$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual podemos aplicar directamente la fórmula [9]. Pero notemos que en el diferencial de la variable $\frac{dx}{2}$ nos sobra la constante $\frac{1}{2}$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral:

$$\therefore \int \underbrace{\cos}_{\cos} \underbrace{\frac{x}{2}}_{v} \underbrace{dx}_{dv} = 2 \text{ sen} \frac{x}{2} + C$$

3. Calcular la $\int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

Solución

En el ejemplo propuesto se observa que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos puede aplicarse directamente. Sin embargo, mediante la aplicación de fórmulas e identidades trigonométricas se facilita la solución de la integral.

Utilizando la expresión trigonométrica $\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$, la integral propuesta se transforma en:

$$\int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int \sec^2 \theta \, d\theta$$

La integral resultante se parece a la fórmula [10], donde identificamos que la variable es:

$$v = \theta$$
$$dv = d\theta$$

Notemos que el diferencial de la variable $dv = d\theta$ completa el diferencial de la integral $d\theta$, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula [10], resultando:

$$\therefore \int \underbrace{\sec^2}_{\sec^2} \underbrace{\theta}_{v} \underbrace{d\theta}_{dv} = \text{tg } \theta + C$$

4. Calcular la $\int \frac{dy}{1-\cos y}$.

Solución

Observamos que, directamente, ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos puede aplicarse; sin embargo, se puede reducir para integrarla mediante el artificio que establece: *Si la expresión propuesta se multiplica y se divide por una misma cantidad, ésta no se altera.* Seleccionamos $(1 + \cos y)$ para multiplicar y dividir la expresión propuesta, ya que debemos dar lugar a una *diferencia de cuadrados*:

$$\int\left(\frac{dy}{1-\cos y}\right)\left(\frac{1+\cos y}{1+\cos y}\right) = \int\frac{(1+\cos y)\,dy}{1-\cos^2 y}$$

Utilizando la fórmula trigonométrica $\mathbf{sen^2\, y = 1 - cos^2\, y}$, resulta:

$$\int\frac{(1+\cos y)\,dy}{1-\cos^2 y} = \int\frac{(1+\cos y)\,dy}{\operatorname{sen}^2 y}$$

De lo anterior, obtenemos: $\int\frac{(1+\cos y)\,dy}{\operatorname{sen}^2 y} = \underbrace{\int\frac{dy}{\operatorname{sen}^2 y}}_{①} + \underbrace{\int\frac{\cos y\, dy}{\operatorname{sen}^2 y}}_{②}$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① En esta integral notemos que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos se puede aplicar directamente. Sin embargo, mediante la aplicación de fórmulas e identidades trigonométricas se facilita la solución de la integral.

Utilizando la expresión trigonométrica $\mathbf{\frac{1}{sen\, y} = csc\, y}$, la integral se transforma en:

$$\int\frac{dy}{\operatorname{sen}^2 y} = \int \csc^2 y\, dy$$

La integral resultante se parece a la fórmula [11], donde identificamos que la variable es:

$$v = y$$
$$dv = dy$$

Observemos que el diferencial de la variable $dv = dy$ completa el diferencial de la integral dy, por lo cual aplicamos directamente la fórmula [11], resultando:

$$\int \underbrace{\csc^2}_{\csc^2} \underbrace{y}_{v} \underbrace{dy}_{dv} = \mathbf{-ctg\; y + C}$$

② En esta integral observamos que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos se puede aplicar directamente. Sin embargo, si pasamos el denominador al numerador, y con base en las leyes de los exponentes, tenemos:

$$\int \frac{\cos y\, dy}{\text{sen}^2 y} = \int sen^{-2} y \cos y\, dy$$

La expresión resultante, se parece a la fórmula [4], donde identificamos a la variable $v = \text{sen}\, y$ y al exponente $n = -2$, es decir:

$$v = \text{sen}\, y \qquad n = -2$$
$$dv = \cos y\, dy$$

Observamos que el diferencial de la variable $dv = \cos\ y\ dy$ completa el diferencial de la integral $\cos y\, dy$, por lo cual aplicamos directamente la fórmula [4], resultando:

$$\int \underbrace{\text{sen}}_{v}{}^{\overset{n}{-2}} y \underbrace{\cos y\, dy}_{dv} = \frac{(\text{sen}\ y)^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{(\text{sen}\ y)^{-1}}{-1} + C = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}$$

Utilizando la expresión trigonométrica $\dfrac{1}{\text{sen}\ y} = \csc y$, el resultado se transforma en:

$$\int \text{sen}^{-2} y \cos y\, dy = -\frac{1}{\text{sen}\ y} + C = \mathbf{-csc}\ \boldsymbol{y} + \mathbf{C}$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \int \frac{\boldsymbol{dy}}{\mathbf{1 - cos}\boldsymbol{y}} = \mathbf{-ctg}\ \boldsymbol{y} \mathbf{- csc}\ \boldsymbol{y} + \boldsymbol{C} = -(\mathbf{ctg}\ \boldsymbol{y} + \mathbf{csc}\ \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{C}$$

5. Calcular la $\int (\text{tg}\ x + \sec x)^2 dx.$

Solución

En el ejemplo propuesto observamos que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos puede aplicarse directamente. Sin embargo, mediante la ejecución de la operación indicada (desarrollo del binomio al cuadrado), tenemos:

$$\int (\text{tg}\ x + \sec x)^2 dx = \int \left(\text{tg}^2\ x + 2\ \text{tg}\ x\ \sec x + \sec^2 x\right) dx$$

Aplicamos directamente la fórmula [3], y tenemos:

$$\int \left(\text{tg}^2 x + 2\,\text{tg}\ x \sec x + \sec^2\ x\right) dx = \underset{①}{\int \text{tg}^2 x\, dx} + \underset{②}{2\int \text{tg}\ x \sec x\, dx} + \underset{③}{\int \sec^2 x\, dx}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① En esta integral, observamos que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos se pueden aplicar directamente. Sin embargo, mediante la aplicación de fórmulas e identidades trigonométricas se facilita la solución de la integral.

Utilizando la expresión trigonométrica $\mathbf{tg^2\,x = sec^2 x - 1}$, la integral se transforma en:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

Al aplicar directamente la fórmula [3], tenemos:

$$\int \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \underbrace{\int \sec^2 x\, dx}_{(1a)} - \underbrace{\int dx}_{(1b)}$$

Sumando (1a) y ③, obtenemos: $\int \sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x\, dx = 2\int \sec^2 x\, dx$

En la integral resultante, identificamos que [2] es una constante y que, de acuerdo con la fórmula [2], tenemos que:

$$\underbrace{2}_{a}\int \underbrace{\operatorname{tg} x \sec x\, dx}_{dv}$$

La integral resultante se parece a la fórmula [10], donde identificamos que la variable es:

$$v = x$$
$$dv = dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual podemos aplicar directamente la fórmula [10]. Pero notemos que la constante 2, que está fuera de la integral, multiplica directamente al resultado, es decir:

$$2\int \underbrace{\sec^2}_{\sec^2} \underbrace{x}_{a} \underbrace{dx}_{dv} = \mathbf{2\,tg\,x + C}$$

(1b) En esta integral aplicamos la fórmula [1], resultando: $-\int \underbrace{dx}_{dv} = \mathbf{-x + C}$

② En esta integral, identificamos que [2] es una constante y que de acuerdo con la fórmula [2], tenemos que:

$$\underbrace{2}_{a}\int \underbrace{\operatorname{tg} x \sec x\, dx}_{dv}$$

La integral resultante se parece a la fórmula [12], donde identificamos que la variable es:

$$v = x$$
$$dv = dx$$

Observamos que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [12]. Pero, notemos que la constante 2, que está fuera de la integral, multiplica directamente al resultado, es decir:

$$2\int \underbrace{\text{tg } x \sec x}_{\text{tg } v \sec v} \underbrace{dx}_{dv} = 2 \sec x + C$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \int (\text{tg } x + \sec x)^2 dx = 2 \text{ tg } x - x + 2 \sec x + C = 2(\text{tg } x + \sec x) - x + C$$

6. Calcular la $\int \csc \frac{2}{3}x \operatorname{ctg} \frac{2}{3}x \, dx.$

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula [13], donde identificamos que la variable es:

$$v = \frac{2}{3}x$$
$$dv = \frac{2}{3}dx$$

Notamos que el diferencial de la variable $dv = \frac{2}{3}dx$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual podemos aplicar directamente la fórmula [13]. Pero observamos que en el diferencial de la variable $\frac{2}{3}dx$ nos sobra la constante $\frac{2}{3}$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \underbrace{\csc}_{\csc} \underbrace{\frac{2}{3}x}_{v} \underbrace{\operatorname{ctg}}_{\operatorname{ctg}} \underbrace{\frac{2}{3}x}_{v} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{3}{2}\left(-\csc \frac{2}{3}x\right) + C = -\frac{3\csc \frac{2}{3}x}{2} + C$$

7. Calcular la $\int e^x \text{ tg } e^x dx.$

Solución

La integral propuesta se parece a la fórmula [14], donde identificamos que la variable es:

$$v = e^x$$
$$dv = e^x dx$$

Notemos que el diferencial de la variable $dv = e^x dx$ completa el diferencial de la integral $e^x\,dx$, por lo cual aplicamos directamente la fórmula [14], resultando:

$$\therefore \int \mathbf{e}^x \mathbf{tg}\, \mathbf{e}^x d\boldsymbol{x} = \int \underbrace{\mathbf{tg}\, \mathbf{e}^x}_{\text{tg } v} \underbrace{\mathbf{e}^x d\boldsymbol{x}}_{dv} = -\mathbf{ln}\cos \mathbf{e}^x + \boldsymbol{C} = \mathbf{ln}\sec \mathbf{e}^x + \boldsymbol{C}$$

8. Calcular la $\int \frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$.

Solución

Para el ejemplo propuesto observamos que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos puede aplicarse directamente. Sin embargo, mediante la ejecución de la operación indicada –división–, tenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta + \int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \underset{①}{\int d\theta} + \underset{②}{\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① En esta integral aplicamos la fórmula [1], resultando: $\int \underbrace{d\theta}_{dv} = \theta + C$

② En esta integral notamos que ninguna de las fórmulas que hasta el momento conocemos se puede aplicar directamente. Sin embargo, mediante la aplicación de fórmulas e identidades trigonométricas se facilita la solución de la integral.
Con la identidad trigonométrica $\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \operatorname{ctg}\theta$, la integral se transforma en:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int \operatorname{ctg}\theta\, d\theta.$$

La integral resultante se parece a la fórmula [15], donde identificamos que la variable es:

$$v = \theta$$
$$dv = d\theta$$

Observamos que el diferencial de la variable $dv = d\theta$ completa el diferencial de la integral $d\theta$, por lo cual podemos aplicar directamente la fórmula [15], resultando:

$$\int \underbrace{\text{ctg}\,\theta}_{\text{ctg}\,v} \underbrace{d\theta}_{dv} = \ln \text{sen}\,\theta + C$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \int \frac{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \theta + \ln \text{sen}\,\theta + C$$

9. Calcular la $\int \left(\sec ax - \csc \frac{x}{a} \right) dx$.

Solución

Aplicando directamente la fórmula [3], tenemos:

$$\int \left(\sec ax - \csc \frac{x}{a} \right) dx = \underbrace{\int \sec ax\, dx}_{①} - \underbrace{\int \csc \frac{x}{a}\, dx}_{②}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① Esta integral se parece a la fórmula [16], donde identificamos que la variable es:

$$v = ax$$
$$dv = a\, dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = a\,dx$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [16]. Pero, notamos que en el diferencial de la variable $a\,dx$ nos sobra la constante a, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral:

$$\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a} [\ln(\sec ax + \text{tg}\, ax)] + C = \frac{\ln(\sec ax + \text{tg}\, ax)}{a} + C$$

② Esta integral se parece a la fórmula [17], donde identificamos que la variable es:

$$v = \frac{x}{a}$$
$$dv = \frac{dx}{a}$$

Observemos que el diferencial de la variable $dv = \frac{dx}{a}$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [17]. Pero notemos que en el diferencial de la variable $\frac{dx}{a}$ nos sobra la constante $\frac{1}{a}$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$-\int \csc\frac{x}{a}\,dx = -a\ln\left(\csc\frac{x}{a} - \text{ctg}\,\frac{x}{a}\right) + C = -a\ln\text{tg}\,\frac{x}{2a} + C$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \int\left(\sec ax - \csc\frac{x}{a}\right)dx = \frac{\ln(\sec ax + \text{tg}\,ax)}{a} - a\ln\left(\csc\frac{x}{a} - \text{ctg}\,\frac{x}{a}\right) + C$$

O también:

$$\therefore \int\left(\sec ax - \csc\frac{x}{a}\right)dx = \frac{\ln(\sec ax + \text{tg}\,ax)}{a} - a\ln\text{tg}\,\frac{x}{2a} + C$$

EJERCICIO VII

I. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando las fórmulas [8] a la [17] del formulario general de integrales inmediatas elementales.

1. $\int \text{sen}\,mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$
2. $\int \cos 5x\,dx = \frac{\text{sen}\,5x}{5} + C$
3. $\int \text{tg}\,ax\,dx = \frac{\ln\sec ax}{a} + C$
4. $\int \frac{n\,dz}{\cos^2 mz} = \frac{n}{m}\text{tg}\,mx + C$
5. $\int \csc z\,dz = \ln(\csc z - \text{ctg}\,z) + C$
6. $\int \sec 2\theta\,\text{tg}\,2\theta\,d\theta = \frac{\sec 2\theta}{2} + C$
7. $\int x^2\cos x^3 dx = \frac{\text{sen}\,x^3}{3} + C$
8. $\int \csc^2 5x\,dx = -\frac{\text{ctg}\,5x}{5} + C$
9. $\int \text{ctg}\,\frac{x}{a}\,dx = a\ln\text{sen}\,\frac{x}{a} + C$
10. $\int \frac{b\,dx}{\text{sen}^2 ax} = -\frac{b\,\text{ctg}\,ax}{a} + C$
11. $\int e^x\text{tg}\,e^x dx = \ln\sec e^x + C$
12. $\int \frac{dx}{1-\text{sen}\,x} = \text{tg}\,x + \text{sec n}\,x + C$
13. $\int x\,\text{sen}\,x^2\,dx = -\frac{\cos x^2}{2} + C$
14. $\int \cos\frac{2x}{3}\,dx = \frac{3\,\text{sen}\,\frac{2x}{3}}{2} + C$
15. $\int \text{sen}(a-bx)\,dx = \frac{\cos(a-bx)}{b} + C$
16. $\int \csc^2(b-ax)\,dx = \frac{\text{ctg}(b-ax)}{a} + C$
17. $\int \sec\frac{x}{2}\,\text{tg}\,\frac{x}{2}\,dx = 2\sec\frac{x}{2} + C$
18. $\int \csc^2 2ax\,dx = -\frac{\text{ctg}\,2ax}{2a} + C$

19. $\int \csc\frac{x}{3}\,dx = 3\ln \operatorname{tg}\frac{x}{6} + C$

20. $\int \frac{dz}{\operatorname{ctg} 3z} = \frac{\ln \sec 3z}{3} + C$

21. $\int \frac{dy}{\cos^2 4y} = \frac{\operatorname{tg} 4y}{4} + C$

22. $\int \frac{d\theta}{\operatorname{tg} 5\theta} = \frac{\ln \operatorname{sen} 5\theta}{5} + C$

23. $\int \frac{dt}{\operatorname{sen} 2t} = \frac{\ln \operatorname{tg} t}{2} + C$

24. $\int \frac{a\,d\theta}{\cos^2 b\theta} = \frac{a \operatorname{tg} b\theta}{b} + C$

25. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$

26. $\int \frac{\cos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}} = 2\operatorname{sen}\sqrt{x} + C$

27. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \csc x - \operatorname{ctg} x + C$

28. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x - \sec x + C$

29. $\int (\operatorname{tg} x - 1)^2 dx = \operatorname{tg} x + 2\ln\cos x + C$

30. $\int \frac{\operatorname{sen} z\,dz}{\sqrt{a-\cos z}} = 2\sqrt{a-\cos z} + C$

31. $\int \frac{\operatorname{sen} t\,dt}{\cos t + 1} = -\ln(\cos t + 1) + C$

32. $\int \frac{\csc^2\theta\,d\theta}{\sqrt{a-\operatorname{ctg}\theta}} = 2\sqrt{a-\operatorname{ctg}\theta} + C$

33. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}} = -2\cos\sqrt{t} + C$

34. $\int (\sec x - \operatorname{tg} x)^2 dx = 2(\operatorname{tg} x - \sec x) - x + C$

35. $\int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{1 + 2 \operatorname{tg}\theta} = \frac{\ln(1 + 2 \operatorname{tg}\theta)}{2} + C$

36. $\int \csc mx \operatorname{ctg} mx \, dx = -\frac{\csc mx}{m} + C$

37. $\int \sec^3 x \operatorname{tg} x \, dx = \frac{\sec^3 x}{3} + C$

38. $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx = e^{\operatorname{sen} x} + C$

39. $\int \frac{(\cos x + 1)\, dx}{\operatorname{sen} x + x} = \ln(\operatorname{sen} x + x) + C$

40. $\int \frac{\sec^2 x \, dx}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} = 2\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \operatorname{ctg} z (\ln \operatorname{sen} z)\, dz$

2. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x \, dx}{1 + \cos^2 x}$

3. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x \, dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

4. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{1 - \cos x}$

5. $\int \left(\operatorname{sen}^3 e^x \cos e^x\right) e^x dx$

6. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{t} \, dt}{\sqrt{t}}$

7. $\int x \sec x^2 dx$

8. $\int \frac{\csc^2 y \, dy}{\operatorname{ctg} y + 1}$

9. $\int \sec^2\theta \, e^{-\operatorname{tg}\theta} d\theta$

10. $\int \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x} dx$

11. $\int \frac{\cos^2 x \, dx}{1 - \operatorname{sen} x}$

12. $\int \operatorname{sen} 2z \sqrt{1 + 2\cos 2z} \, dz$

13. $\int \operatorname{tg} mx \sec^2 mx \, dx$

14. $\int \sec^2 3x \, dx$

15. $\int \sec 2x \operatorname{tg} 2x \, dx$

16. $\int \frac{\sec^2 ax}{\operatorname{tg} ax} dx$

17. $\int \frac{d\theta}{\sec a\theta + 1}$

18. $\int e^{\operatorname{tg} mx} \sec^2 mx \, dx$

19. $\int e^{2 \operatorname{sen} ax} \cos ax \, dx$

20. $\int \operatorname{sen}^3 2ax \cos 2ax \, dx$

21. $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$

22. $\int \cos ax \sqrt{1 + a \operatorname{sen} ax} \, dx$

1.8 APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS 18 A LA 24 DEL FORMULARIO GENERAL DE INTEGRALES INMEDIATAS ELEMENTALES*

Fórmulas para integrar expresiones de segundo grado de dos términos:

[18] $\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{arc tg} \frac{v}{a} + C$

[19] $\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{v-a}{v+a}\right) + C$

[19a] $\int \frac{dv}{a^2-v^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right) + C$

[20] $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen} \frac{v}{a} + C$

[21] $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-a^2}} = \frac{1}{a} \text{arc sec} \frac{v}{a} + C$

[22] $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

[23] $\int \sqrt{a^2-v^2}\,dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sen} \frac{v}{a} + C$

[24] $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\,dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

EJEMPLOS

1. Calcular la $\int \frac{dt}{16+t^2}$.

Solución

Con base en los pasos para integrar una función, identificamos en la expresión dada que:

$$v^2 = t^2 \qquad a^2 = 16$$
$$v = t \qquad a = 4$$
$$dv = dt$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dt$ completa el diferencial de la integral dt, por lo cual podemos aplicar directamente la fórmula [18], es decir:

* **Las fórmulas para integrales inmediatas elementales se obtienen directamente de las fórmulas generales de diferenciación.**

$$\therefore \int \frac{\overset{dv}{\overline{dt}}}{\underset{a^2}{\underline{16}} + \underset{v^2}{\underline{t^2}}} = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{4} + C = \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{4}}{4} + C$$

2. Calcular la $\int \frac{dx}{m^2x^2 - n^2}$.

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula [19], donde identificamos que:

$$v^2 = m^2x^2 \qquad a^2 = n^2$$
$$v = mx \qquad a = n$$
$$dv = mdx$$

Observamos que el diferencial de la variable $dv = mdx$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [19]. Notemos que en el diferencial de la variable mdx sobra la constante m, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral:

$$\therefore \int \frac{\overset{dv}{\overline{dx}}}{\underset{v^2}{\underline{m^2x^2}} - \underset{a^2}{\underline{n^2}}} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{2n} \ln\left(\frac{mx - n}{mx + n}\right)\right] + C = \frac{1}{2mn} \ln\left(\frac{mx - n}{mx + n}\right) + C$$

3. Calcular la $\int \frac{5dz}{9 - (z - 3)^2}$.

Solución

En la integral propuesta identificamos que 5 es una constante y que de acuerdo con la fórmula [2], tenemos que:

$$\therefore \int \frac{\overset{a}{\overline{5}}\ dz}{9 - (z - 3)^2} = \underset{a}{\underline{5}} \int \frac{dz}{\underset{dv}{\underline{9 - (z - 3)^2}}}$$

La integral resultante se parece a la fórmula [19a], donde identificamos que:

$$v^2 = (z - 3)^2 \qquad a^2 = 9$$
$$v = (z - 3) \qquad a = 3$$
$$dv = dz$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = dz$ completa el diferencial de la integral dz; por esta razón estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [19a], es decir:

$$\therefore 5\int \frac{\overbrace{dz}^{dv}}{\underbrace{9}_{a^2}-\underbrace{(z-3)^2}_{v^2}} = 5\left[\frac{1}{2(3)}\ln\left(\frac{3+(z-3)}{3-(z-3)}\right)\right] + C = \frac{5}{6}\ln\left(\frac{z}{6-z}\right) + C$$

4. Calcular la $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{7-\text{sen}^2\theta}}$.

Solución

Esta integral es semejante a la fórmula [20], donde identificamos que:

$$\begin{aligned} v^2 &= \text{sen}^2\theta & a^2 &= 7 \\ v &= \text{sen}\,\theta & a &= \sqrt{7} \\ dv &= \cos\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Notamos que el diferencial de la variable $dv = \cos\theta\, d\theta$ completa el diferencial de la integral $\cos\theta\, d\theta$; por ello estamos en condiciones de aplicar directamente la mencionada fórmula [20]:

$$\therefore \int \frac{\overbrace{\cos\theta\, d\theta}^{dv}}{\sqrt{\underbrace{7}_{a^2} - \underbrace{\text{sen}^2\theta}_{v^2}}} = \text{arc sen}\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\sqrt{7}}\right) + C$$

5. Calcular la $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}}$.

Solución

La integral propuesta es similar a la fórmula [21], donde identificamos que:

$$\begin{aligned} v^2 &= x^4 & a^2 &= 9 \\ v &= x^2 & a &= 3 \\ dv &= 2x\, dx \end{aligned}$$

Comprobamos que la variable resultante $v = x^2$ no coincide con lo establecido en la fórmula [21]. Para que la integral propuesta satisfaga la condición de la fórmula, será necesario multiplicar y dividir la expresión por una misma cantidad, que en este caso será x, es decir:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}}\left(\frac{x}{x}\right) = \int \frac{x\, dx}{x^2\sqrt{x^4-9}}$$

Ahora vemos que el diferencial de la variable $dv = 2x\ dx$ sí completa el *diferencial de la integral $x\,dx$, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula* [21]. Pero notemos que en el diferencial de la variable $2x\,dx$ nos sobra la constante 2, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \frac{\overbrace{x\,dx}^{dv}}{\underbrace{x^2}_{v}\sqrt{\underbrace{x^4}_{v^2}-\underbrace{9}_{a^2}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sec}\frac{x^2}{3}\right)+C = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sec}\frac{x^2}{3}+C$$

6. Calcular la $\int \frac{z\,dz}{\sqrt{3z^4+5}}$.

Solución

Esta integral es semejante a la fórmula [22], donde identificamos que:

$$v^2 = 3z^4 \qquad a^2 = 5$$
$$v = \sqrt{3}\,z^2 \qquad a = \sqrt{5}$$
$$dv = 2\sqrt{3}\,z\,dz$$

En este caso, el diferencial de la variable $dv = 2\sqrt{3}\,z\,dz$ completa el diferencial de la integral $z\,dz$, lo que nos permite aplicar directamente la fórmula [22]. Pero encontramos que en el diferencial de la variable $2\sqrt{3}\,z\,dz$ nos sobra la constante $2\sqrt{3}$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \frac{\overbrace{z\,dz}^{dv}}{\sqrt{\underbrace{3x^4}_{v^2}+\underbrace{5}_{a^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\,z^2+\sqrt{3z^4+5}\right)+C$$

7. Calcular la $\int \frac{2e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución

En la integral propuesta identificamos que 2 es una constante y, de acuerdo con la fórmula [2], tenemos que:

$$\int \frac{\overbrace{2}^{a}\,e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \underbrace{2}_{a}\int \frac{e^x\,dx}{\underbrace{\sqrt{e^{2x}-1}}_{dv}}$$

La integral así obtenida se parece a la fórmula [22], donde identificamos que:

$$v^2 = e^{2x} \qquad a^2 = 1$$
$$v = e^x \qquad a = 1$$
$$dv = e^x\,dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = e^x\,dx$ completa el diferencial de la integral $e^x dx$, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [22], es decir:

$$\therefore \int \frac{2e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = 2\int \frac{\overbrace{e^x\,dx}^{dv}}{\sqrt{\underbrace{e^{2x}}_{v^2} - \underbrace{1}_{a^2}}} = 2\ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right) + C$$

8. Calcular la $\int \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$.

Solución

Esta integral puede resolverse aplicando directamente la fórmula [23]. También se puede resolver mediante el proceso de la sustracción de números racionales, es decir:

$$\int \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = \int \sqrt{\frac{4-x^2}{4}}\,dx = \frac{1}{\underbrace{2}_{a}} \int \underbrace{\sqrt{4-x^2}\,dx}_{dv}$$

En la integral resultante, donde hemos aplicado directamente la fórmula [2], identificamos que:

$$v^2 = x^2 \qquad a^2 = 4$$
$$v = x \qquad a = 2$$
$$dv = dx$$

Observamos que el diferencial de la variable $dv = dx$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [23], de este modo:

$$\therefore \frac{1}{2}\int \sqrt{\underbrace{4}_{a^2} - \underbrace{x^2}_{v^2}}\,\overbrace{dx}^{dv} = \frac{x}{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + \text{arc sen}\,\frac{x}{2} + C$$

9. Calcular la $\int \sqrt{8+3x^2}\,dx$.

Solución

La integral del ejemplo se parece a la fórmula [24], donde identificamos que:

$$v^2 = 3x^2 \qquad a^2 = 8$$
$$v = \sqrt{3}\ x \qquad a = \sqrt{8}$$
$$dv = \sqrt{3}\ dx$$

Reconocemos que el diferencial de la variable $dv\ \sqrt{3}\ dx$ completa el diferencial de la integral, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [24]. Pero notemos que en el diferencial de la variable $\sqrt{3}\ dx$ nos sobra la constante $\sqrt{3}$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \sqrt{\underbrace{8}_{a^2} + \underbrace{3x^2}_{v^2}}\ \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x}{2}\sqrt{8+3x^2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\ x + \sqrt{8+3x^2}\right) + C$$

10. Calcular la $\int \sqrt{(2x-1)^2 - 9}\ dx$.

Solución

La integral del ejemplo se parece a la fórmula [24], donde identificamos que:

$$v^2 = (2x-1)^2 \qquad a^2 = 9$$
$$v = (2x-1) \qquad a = 3$$
$$dv = 2dx$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = 2dx$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula [24]. Pero notemos que en el diferencial de la variable $2dx$ nos sobra la constante 2, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral:

$$\therefore \int \sqrt{\underbrace{(2x-1)^2}_{v^2} - \underbrace{9}_{a^2}}\ \underbrace{dx}_{dv} = \frac{(2x-1)}{4}\sqrt{(2x-1)^2 - 9} - \frac{9}{4}\ln\left[(2x-1) + \sqrt{(2x-1)^2 - 9}\ \right] + C$$

EJERCICIO VIII

I. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando las fórmulas [18] a la [24] del formulario general de integrales inmediatas elementales.

1. $\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C$

2. $\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right) + C$

3. $\int \frac{dz}{\sqrt{16-z^2}} = \text{arc sen}\,\frac{z}{4} + C$

4. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2-25}} = \ln\left(\theta + \sqrt{\theta^2-25}\right) + C$

5. $\int \frac{dx}{16x^2-25} = \frac{1}{40}\ln\left(\frac{4x-5}{4x+5}\right) + C$

6. $\int \frac{dx}{16-9x^2} = \frac{1}{24}\ln\left(\frac{4+3x}{4-3x}\right) + C$

7. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{4-9\theta^2}} = \frac{1}{3}\,\text{arc sen}\,\frac{3\theta}{2} + C$

8. $\int \frac{dv}{4-(v+3)^2} = \frac{1}{4}\ln\left[\frac{5+v}{-(v+1)}\right] + C$

9. $\int \frac{dx}{9-16x^2} = \frac{1}{24}\ln\left[\frac{3+4x}{3-4x}\right] + C$

10. $\int \frac{11dx}{5+11x^2} = \frac{11}{\sqrt{55}}\,\text{arc tg}\,\sqrt{\frac{11}{55}}x + C$

11. $\int \frac{x\,dx}{7x^4+3} = \frac{1}{2\sqrt{21}}\,\text{arc tg}\,\sqrt{\frac{7}{3}}\,x^2 + C$

12. $\int \frac{\theta\,d\theta}{\theta^4-4} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{\theta^2-2}{\theta^2+2}\right) + C$

13. $\int \frac{dx}{4x^2+5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x}{\sqrt{5}} + C$

14. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{9x^2-16}} = \ln\left(3x + \sqrt{9x^2-16}\right) + C$

15. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right) + C$

16. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{9-\text{sen}^2 x}} = \text{arc sen}\left(\frac{\text{sen}\,x}{3}\right) + C$

17. $\int \frac{ax\,dx}{1-x^4} = \frac{a}{4}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + C$

18. $\int \frac{5x\,dx}{x^4+16} = \frac{5}{8}\,\text{arc tg}\,\frac{x^2}{2} + C$

19. $\int \frac{dy}{9+(y-2)^2} = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\left(\frac{y-2}{3}\right) + C$

20. $\int \frac{dt}{1+a^2t^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,at + C$

21. $\int \frac{5e^x\,dx}{1-e^{2x}} = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) + C$

22. $\int \frac{6x\,dx}{\sqrt{3-8x^4}} = \frac{3}{\sqrt{8}}\,\text{arc sen}\sqrt{\frac{8}{3}}\,x^2 + C$

23. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\text{tg}^2 x}} = \text{arc sen}\left(\frac{\text{tg}\,x}{2}\right) + C$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}} = \frac{1}{3}\ln\left(3x + \sqrt{9x^2-1}\right) + C$

25. $\int \frac{dx}{9x^2+4} = \frac{1}{6}\,\text{arc tg}\,\frac{3x}{2} + C$

26. $\int \frac{b\,dx}{\sqrt{a^2x^2 - c^2}} = \frac{b}{a} \ln\left(ax + \sqrt{a^2x^2 - c^2}\right) + C$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 25}} = \frac{1}{2} \ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 25}\right) + C$

28. $\int \frac{dz}{\sqrt{25z^2 - 4}} = \frac{1}{5} \ln\left(5z + \sqrt{25z^2 - 4}\right) + C$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + (x+a)^2}} = \ln\left[(x+a) + \sqrt{b^2 + (x+a)^2}\ \right] + C$

30. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2 \text{ arc sen} \frac{x}{2} + C$

31. $\int \sqrt{25 + 9x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{25 + 9x^2} + \frac{25}{6} \ln\left(3x + \sqrt{25 + 9x^2}\right) + C$

32. $\int \sqrt{2 - \frac{x^2}{8}}\, dx = \frac{x}{4\sqrt{2}}\sqrt{16 - x^2} + 2\sqrt{2} \text{ arc sen} \frac{x}{4} + C$

33. $\int \sqrt{5x^2 - 3}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{5x^2 - 3} - \frac{x}{2\sqrt{5}} \ln\left(\sqrt{5}\, x + \sqrt{5x^2 - 3}\right) + C$

34. $\int \sqrt{2 + 5x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{2 + 5x^2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left(\sqrt{5}\, x + \sqrt{2 + 5x^2}\right) + C$

35. $\int \sqrt{3 - 8x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{3 - 8x^2} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \text{ arc sen} \sqrt{\frac{8}{3}}\, x + C$

36. $\int \sqrt{m^2 - (x+n)^2}\, dx = \frac{(x+n)}{2}\sqrt{m^2 - (x+n)^2} + \frac{m^2}{2} \text{ arc sen}\left(\frac{x+n}{m}\right) + C$

37. $\int \sqrt{(2\theta - 1)^2 - 4}\, d\theta = \frac{(2\theta - 1)}{2}\sqrt{(2\theta - 1)^2 - 4} - 2\ln\left[(2\theta - 1) + \sqrt{(2\theta - 1)^2 - 4}\right] + C$

38. $\int \sqrt{9 - e^{2x}}\, e^x\, dx = \frac{e^x}{2}\sqrt{9 - e^{2x}} + \frac{9}{2} \text{ arc sen} \frac{e^x}{3} + C$

39. $\int \sqrt{4 + \cos^2 t}\, \text{sen}\, t\, dt = \frac{\cos t}{2}\sqrt{4 + \cos^2 t} + 2\ln\left(\cos t + \sqrt{4 + \cos^2 t}\right) + C$

40. $\int \sqrt{8 - 3u^4}\, 6u\, du = \frac{3u^2}{2}\sqrt{8 - 3u^4} + 4\sqrt{3} \text{ arc sen} \sqrt{\frac{3}{8}}\, u^2 + C$

41. $\int \sqrt{5 + x^6}\, 7x^2\, dx = \frac{7x^3}{6}\sqrt{5 + x^6} + \frac{35}{6} \ln\left(x^3 + \sqrt{5 + x^6}\right) + C$

42. $\int \sqrt{9-\text{ctg}^2 x}\,\csc^2 x\,dx = -\left[\dfrac{\text{ctg}\,x}{2}\sqrt{9-\text{ctg}^2 x}+\dfrac{9}{2}\,\text{arc sen}\left(\dfrac{\text{ctg}\,x}{3}\right)\right]$

43. $\int \sqrt{6-4t^2}\,dt = \dfrac{t}{2}\sqrt{6-4t^2}+3\,\text{arc sen}\,\dfrac{2t}{\sqrt{6}}+C$

44. $\int \sqrt{(2x+1)^2+1}\,dx = \dfrac{(2x+1)}{2}\sqrt{(2x+1)^2+1}+\dfrac{1}{2}\ln\left[(2x+1)+(2x+1)^2+1\right]+C$

45. $\int \sqrt{36-(x-3)^2}\,dx = \dfrac{(x-3)}{2}\sqrt{36-(x-3)^2}+18\,\text{arc sen}\left(\dfrac{x-3}{6}\right)+C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \dfrac{\cos x\,dx}{\text{sen}^2 x+4}$

2. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}$

3. $\int \dfrac{\sqrt{\cos x}\,\text{sen}\,x\,dx}{\sqrt{\cos^3 x+9}}$

4. $\int \dfrac{4x^2\,dx}{4-9x^6}$

5. $\int \dfrac{\sqrt{\text{sen}\,x}\cos x\,dx}{\sqrt{\text{sen}^3 x+9}}$

6. $\int \dfrac{\csc^2 x\,dx}{\text{ctg}^2 x+9}$

7. $\int \dfrac{5dx}{9x^2-25}$

8. $\int \dfrac{\sec^2 ax\,dx}{\sqrt{16-\text{tg}^2 ax}}$

9. $\int \dfrac{4x\,dx}{1-4x^4}$

10. $\int \dfrac{2\,dx}{4+(x-2)^2}$

11. $\int \dfrac{3\,dx}{4x^2+16}$

12. $\int \dfrac{\cos x\,dx}{\sqrt{9-\text{sen}^2 x}}$

13. $\int \dfrac{3\,dx}{x^2-25}$

14. $\int \dfrac{\text{sen}\,x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x-4}}$

15. $\int \dfrac{\sec^2 x\,dx}{4-\text{tg}^2 x}$

16. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{(\ln x)^2+9}}$

17. $\int \dfrac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x\sqrt{\ln^3 x+8}}$

18. $\int \dfrac{\csc^2 x\,dx}{4+\text{ctg}^2 x}$

19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16+(x-6)^2}}$

20. $\int \dfrac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$

21. $\int \sqrt{3y^2 - 1}dy$

22. $\int \sqrt{(3z+1)^2 - 2}\, dz$

23. $\int \sqrt{3\theta^2 - 10}\, d\theta$

24. $\int \sqrt{7 - 5u^2}\, du$

25. $\int \sqrt{\cos^2 3x + 4}\ \operatorname{sen} 3x\, dx$

26. $\int \sqrt{a^2 x^2 - c^2}\, dx$

27. $\int \sqrt{1 + a^2 y^2}\, dy$

28. $\int \frac{ax\, dx}{\sqrt{x^4 + b^4}}$

29. $\int \sqrt{11 + 7x^4}\, x\, dx$

30. $\int \sqrt{(x-1)^2 - 7}\, dx$

31. $\int \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}\, dx$

32. $\int \sqrt{5 + 3x^2}\, dx$

33. $\int \sqrt{8 - 3x^2}\, dx$

34. $\int \sqrt{\operatorname{sen}^2 2x + 9}\cos 2x\, dx$

35. $\int \sqrt{\cos^2 2x + 16}\operatorname{sen} 2x\, dx$

36. $\int \sqrt{8 - (2x-1)^2}\, dx$

37. $\int \sqrt{4 - 9t^2}\, dt$

38. $\int \sqrt{5t^4 + 3}\, t\, dt$

39. $\int \sqrt{25 - x^6}\, x^2\, dx$

40. $\int \frac{dt}{t\sqrt{4t^2 - 9}}$

41. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 16}}$

42. $\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta^2 - 5}}$

43. $\int \frac{dx}{2x\sqrt{16x^2 - 8}}$

44. $\int \sqrt{1 - x^4}\, x\, dx$

UNIDAD 2 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

2.1 SOLUCIÓN DE INTEGRALES INDEFINIDAS, REDUCIBLES A INMEDIATAS POR SUSTITUCIÓN ALGEBRAICA

Las integrales que contienen expresiones del tipo $ax^2 + bx + c$ o $ax^2 + bx$ pueden integrarse fácilmente mediante cualquiera de los dos siguientes métodos.

Primer método

Si una integral implica una expresión de segundo grado de tres términos ($ax^2 + bx + c$) o de dos términos ($ax^2 + bx$), ésta puede reducirse a una expresión de dos términos ($v^2 \pm a^2$) y ($a^2 - v^2$) completando el cuadrado (sustitución algebraica).

EJEMPLOS

1. Calcular la $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$.

Solución

En la integral propuesta identificamos la expresión $x^2 - 4x + 13$, que es de la forma $ax^2 + bx + c$. Completando el cuadrado para $x^2 - 4x + 13$, tenemos:

$$x^2 - 4x + 13 = \underbrace{x^2 - 4x + 4} + 9, \text{ es decir:}$$
$$x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$$

Por lo anterior, resulta que: $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} = \int \frac{\overbrace{dx}^{dv}}{\underbrace{(x-2)^2}_{v^2} + \underbrace{9}_{a^2}}$

Aplicando la fórmula [18], tenemos que: $v^2 = (x-2)^2$ $\quad a^2 = 9$

$$v = (x-2) \qquad a = 3$$

$$dv = dx$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 9} = \frac{1}{3} \text{arc tg} \frac{(x-2)}{3} + C$$

2. Calcular la $\int \frac{dx}{3x - x^2 - 2}$.

Solución

En la integral propuesta encontramos que la expresión $3x - x^2 - 2$ (que ordenadamente es: $-x^2 + 3x - 2$) es de la forma $ax^2 + bx + c$. Completamos el cuadrado para $(-x^2 + 3x - 2)$, y tenemos:

$$\left(-x^2 + 3x - 2\right) = -\underbrace{\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)} + \frac{1}{4}, \quad \text{es decir}$$

$$\left(-x^2 + 3x - 2\right) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

Por lo anterior, resulta que: $\int \frac{dx}{3x - x^2 - 2} = \int \frac{\overbrace{dx}^{dv}}{\underbrace{1/4}_{a^2} - \underbrace{(x - 3/2)^2}_{v^2}}$

Aplicando la fórmula 19a, tenemos que:

$$v^2 = (x - 3/2)^2 \qquad a^2 = 1/4$$
$$v = (x - 3/2) \qquad a = 1/2$$
$$dv = dx$$

$$\therefore \int \frac{dx}{1/4 - (x - 3/2)^2} = \frac{1}{2(1/2)} \ln\left[\frac{1/2 + (x - 3/2)}{1/2 - (x - 3/2)}\right] + C = \ln\left(\frac{x - 1}{2 - x}\right) + C$$

3. Calcular la $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x + 4}}$.

Solución

Observamos que en la integral propuesta, el coeficiente numérico del término $(3x^2)$ no es cuadrado perfecto, por lo que se recomienda su transformación. Para lograrlo, sólo es necesario multiplicar y dividir la expresión integral por una misma cantidad, que generalmente es el mismo coeficiente numérico, es decir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x + 4}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \int \frac{\sqrt{3}\ dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 12}} = \sqrt{3}\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 12}}$$

En la integral resultante identificamos la expresión $9x^2 - 6x + 12$, que es de la forma $ax^2 + bx + c$. Completamos el cuadrado para $9x^2 - 6x + 12$, y tenemos

$$9x^2 - 6x + 12 = \underline{9x^2 - 6x + 1} + 11, \text{ es decir:}$$
$$9x^2 - 6x + 12 = (3x-1)^2 + 11$$

Por lo anterior, resulta que: $\sqrt{3}\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 12}} = \sqrt{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2 + 11}}$

Aplicando la fórmula $\boxed{22}$, tenemos que: $v^2 = (3x-1)^2 \quad a^2 = 11$

$$v = (3x-1) \quad a = \sqrt{11}$$
$$dv = 3dx$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x + 4}} = \sqrt{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2 + 11}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left[(3x-1) + \sqrt{3x^2 - 2x + 4}\right] + C$$

4. Calcular la $\int \frac{dt}{3t - 2t^2}$.

Solución

Observamos que en la integral propuesta la expresión $3t - 2t^2$ (que ordenadamente es: $-2t^2 + 3t$) es de la forma $ax^2 + bx$. Asimismo, el coeficiente numérico del término $(-2t^2)$ no es un cuadrado perfecto, por lo que se recomienda su transformación. Para lograrlo, sólo es necesario multiplicar y dividir la expresión integral por una misma cantidad, que generalmente es el mismo coeficiente numérico, es decir:

$$\int \frac{dt}{3t - 2t^2}\left(\frac{2}{2}\right) = \int \frac{2dt}{6t - 4t^2} = 2\int \frac{dt}{6t - 4t^2}$$

Completamos el cuadrado para la expresión ordenada $(-4t^2 + 6t)$, y tenemos:

$$-4t^2 + 6t = -\underline{(4t^2 - 6t + 9/4)} + 9/4, \text{ es decir:}$$
$$-4t^2 + 6t = -(2t - 3/2)^2 + 9/4 = 9/4 - (2t - 3/2)^2$$

Por lo anterior, resulta que: $2\int \frac{dt}{\sqrt{6t - 4t^2}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{9/4 - (2t - 3/2)^2}}$

Aplicando la fórmula $\boxed{19a}$, tenemos que: $v^2 = (2t - 3/2)^2 \quad a^2 = 9/4$

$$v = (2t - 3/2) \quad a = 3/2$$
$$dv = 2dt$$

$$\therefore 2\int \frac{dt}{9/4-(2t-3/2)^2} = \frac{2}{2}\left[\frac{1}{2(3/2)}\ \ln\left(\frac{3/2+(2t-3/2)}{3/2-(2t-3/2)}\right)\right] + C = \frac{1}{3}\ \ln\left(\frac{2t}{3-2t}\right) + C$$

5. Calcular la $\int\sqrt{x^2+2x+5}\ dx$.

Solución

En la integral propuesta identificamos la expresión x^2+2x+5 que es de la forma ax^2+bx+c. Completando el cuadrado para x^2+2x+5, tenemos:

$$x^2+2x+5 = \underline{x^2+2x+1} + 4, \text{ es decir:}$$
$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$$

Por lo anterior, resulta que: $\int\sqrt{x^2+2x+5}\ dx = \int\sqrt{(x+1)^2+4\,dx}$

Aplicando la fórmula [24], tenemos que:

$$v^2 = (x+1)^2 \qquad a^2 = 4$$
$$v = (x+1) \qquad a = 2$$
$$dv = dx$$

$$\therefore \int\sqrt{(x+1)^2+4}\ dx = \frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln\left[(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right] + C$$

6. Calcular la $\int\sqrt{4x-x^2}\,dx$.

Solución

En esta integral identificamos que la expresión $4x-x^2$ (que ordenadamente es: $-x^2+4x$) es de la forma ax^2+bx. Completamos el cuadrado para $(-x^2+4x)$, y tenemos:

$$(-x^2+4x) = -\underline{(x^2-4x+4)} + 4, \text{ es decir:}$$
$$(-x^2+4x) = -(x-2)^2+4 = 4-(x-2)^2$$

Por lo anterior, resulta que: $\int\sqrt{4x-x^2}\ dx = \int\sqrt{4-(x-2)^2}\ dx$

Aplicando la fórmula [23], tenemos que:

$$v^2 = (x-2)^2 \qquad a^2 = 4$$
$$v = (x-2) \qquad a = 2$$
$$dv = dx$$

$$\therefore \int\sqrt{4-(x-2)^2}\ dx = \frac{(x-2)}{2}\sqrt{4x-x^2} + 2\ \text{arc sen}\frac{(x-2)}{2} + C$$

Segundo método

Cuando el integrando es una fracción cuyo numerador es una expresión de primer grado, mientras que el denominador es una expresión de segundo grado o la raíz cuadrada de tal expresión, la integral dada puede reducirse a una integral inmediata, como se explica a continuación.

EJEMPLOS

1. Calcular la $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+4}$.

Solución

Multiplicamos el numerador de la integral por dx, y resulta:

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{x^2+4} = \int \frac{x\ \ dx + 3\ dx}{x^2+4}$$

Aplicando directamente la fórmula $\boxed{3}$, tenemos:

$$\int \frac{x\ \ dx + 3dx}{x^2+4} = \underset{①}{\int \frac{x\ \ dx}{x^2+4}} + \underset{②}{3\int \frac{dx}{x^2+4}}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① En esta integral, identificamos que: $v = x^2 + 4$

$dv = 2x\ \ dx$

Notamos que el diferencial de la variable $dv = 2x\,dx$ completa el diferencial de la integral $x\,dx$, por lo cual podemos aplicar directamente la fórmula $\boxed{5}$. Hacemos notar que en el diferencial de la variable $2x\,dx$ nos sobra la constante 2, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral:

$$\int \frac{x\ \ dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + C$$

② En esta integral identificamos que: $v^2 = x^2$ $\quad a^2 = 4$

$v = x$ $\quad a = 2$

$dv = dx$

Se observa que el diferencial de la variable $du = dx$ completa el diferencial de la integral dx, por lo cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula $\boxed{18}$, es decir:

$$3\int \frac{dx}{x^2+4} = 3\left[\frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{2}\right] + C = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\textbf{arc tg}\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+4\right) + 3\text{ arc tg}\frac{x}{2}\right] + C$$

2. Calcular la $\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Solución

Multiplicamos el numerador de la integral por dx **y resulta:**

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{3x\ \ dx - 2dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

Aplicando directamente la fórmula [3]**, tenemos:**

$$\int \frac{3x\ \ dx - 2dx}{\sqrt{16-x^2}} = 3\underbrace{\int \frac{x\ \ dx}{\sqrt{16-x^2}}}_{①} - 2\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}}_{②}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① **En esta integral, pasamos el denominador de la forma** ***radical*** **a la forma** ***exponencial*****; finalmente lo pasamos al numerador y, con base en las leyes de los exponentes, tenemos:**

$$3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = 3\int \frac{x\,dx}{\left(16-x^2\right)^{1/2}} = 3\int \left(16-x^2\right)^{1/2} x\,dx$$

De la integral resultante, identificamos que:

$$v = 16 - x^2$$
$$dv = -2x\ \ dx$$
$$n = -1/2$$

Aplicamos la fórmula [4]**, y tenemos que:**

$$3\int \left(16-x^2\right)^{-1/2} x\ \ dx = -\frac{3}{2}\left[\frac{\left(16-x^2\right)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right] + C = -\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{16}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} + \boldsymbol{C}$$

② Para esta integral, identificamos que: $v^2 = x^2 \quad a^2 = 16$

$$v = x \qquad a = 4$$
$$dv = dx$$

Aplicando la fórmula [20], tenemos que: $-2\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \mathbf{-2\ arc\ sen\frac{x}{4} + C}$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos que:

$$\therefore \int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = -3\sqrt{16-x^2} - 2\ \text{arc sen}\frac{x}{4} + C = -\left(3\sqrt{16-x^2} + 2\ \text{arc sen}\frac{x}{4}\right) + C$$

3. Calcular la $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}}$.

Solución

Ante todo, cuando la integral propuesta contenga en el denominador una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$, $ax^2 + bx$ o la raíz cuadrada de tal expresión, se recomienda primeramente tomar como variable a dicha expresión:

$$v = 6x - x^2$$
$$dv = (6-2x)\,dx$$
$$dv = -2(x-3)\,dx$$

En el numerador de la integral, debemos tener $(x-3)\,dx$ para completar el diferencial de la variable:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \int \frac{(x-3+3+3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \int \frac{(x-3+6)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}}$$

Aplicando directamente la fórmula [3], tenemos:

$$\int \frac{(x-3)\,dx + 6\,dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \underbrace{\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}}}_{①} + 6\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}}_{②}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① Esta integral puede reducirse de acuerdo con la fórmula [4], es decir:

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \int \left(6x-x^2\right)^{-1/2}(x-3)\,dx \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} v &= 6x-x^2 \\ dv &= (6-2x)\,dx \\ dv &= -2(x-3)\,dx \\ n &= -1/2 \end{aligned}$$

De lo anterior resulta:

② $$\int (6x - x^2)^{-1/2}(x-3)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(6x-x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right] + C = -\sqrt{\mathbf{6x - x^2}} + \mathbf{C}$$

En esta integral identificamos que la expresión $6x - x^2$ (que ordenadamente es $-x^2 + 6x$) es de la forma $ax^2 + bx$. Complementando el cuadrado para $(-x^2 + bx)$, tenemos:

$$(-x^2 + 6x) = -(x^2 - 6x + 9) + 9, \quad \text{es decir:}$$
$$(-x^2 + 6x) = -(x-3)^2 + 9 = 9 - (x-3)^2$$

Por lo anterior, resulta que: $6\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2}} = 6\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-3)^2}}$

Aplicando la fórmula [20], tenemos que:

$$v^2 = (x-3)^2 \qquad a^2 = 9$$
$$dv = (x-3) \qquad a = 3$$
$$dv = dx$$

y resulta:

$$6\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-3)^2}} = \mathbf{6\ arc\ sen}\,\frac{\mathbf{(x-3)}}{\mathbf{3}} + \mathbf{C}$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos que:

$$\therefore \int \frac{\mathbf{(x+3)\,dx}}{\sqrt{\mathbf{6x - x^2}}} = -\sqrt{\mathbf{6x - x^2}} + \mathbf{6\ arc\ sen}\,\frac{\mathbf{(x-3)}}{\mathbf{3}} + \mathbf{C}$$

4. Calcular la $\int \frac{(3x+2)\,dx}{19 - 5x + x^2}$.

Solución

Tomando la expresión de segundo grado como variable, resulta:

$$v = 19 - 5x + x^2$$
$$dv = (-5 + 2x)\,dx$$
$$dv = 2(x - 5/2)\,dx$$

En el numerador de la integral, debemos tener $(x - 5/2)\,dx$ para completar diferencial de la variable:

$$\int \frac{(3x+2)\,dx}{19-5x+x^2} = \int \frac{3(x + 2/3 - 5/2 + 5/2)\,dx}{19-5x+x^2} = \int \frac{3(x - 5/2 + 2/3 + 5/2)\,dx}{19-5x+x^2}$$

Aplicamos directamente la fórmula [3], y tenemos:

$$\int \frac{3\,(x-5/2+2/3+5/2)\,dx}{19-5x+x^2} = 3\underbrace{\int \frac{(x-5/2)\,dx}{19-5x+x^2}}_{①} + 3\,(2/3+5/2)\underbrace{\int \frac{dx}{19-5x+x^2}}_{②}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

① ***Para esta integral, identificamos que:***

$$v = 19-5x+x^2$$
$$dv = (-5+2x)\,dx$$
$$dv = 2(x-5/2)\,dx$$

Aplicando la fórmula $\boxed{5}$**, resulta:** $3\int \frac{(x-5/2)\,dx}{\sqrt{19-5x+x^2}} = \mathbf{\frac{3}{2}\ln\left(19-5x+x^2\right)+C}$

② **En esta integral identificamos que la expresión $19-5x+x^2$ (que ordenadamente es: $x^2-5x+19$) es de la forma ax^2+bx+c. Completando el cuadrado para $x^2-5x+19$, tenemos:**

$$x^2-5x+19 = \underbrace{x^2-5x+\frac{25}{4}}+\frac{51}{4}\,, \quad \text{es decir:}$$
$$x^2-5x+19 = (x-5/2)^2+\frac{51}{4}$$

Por lo anterior, tenemos: $3\,(2/3+5/2)\int \frac{dx}{\sqrt{19-5x+x^2}} = 19/2\int \frac{dx}{\sqrt{(x-5/2)^2+\frac{51}{4}}}$

Al aplicar la fórmula $\boxed{18}$**, tenemos que:**

$$v^2 = (x-5/2)^2 \qquad a^2 = 51/4$$
$$v = (x-5/2) \qquad a = \sqrt{51}/2$$
$$dv = dx$$

De ello resulta:

$$19/2\int \frac{dx}{\sqrt{(x-5/2)^2+\frac{51}{4}}} = \frac{19}{2}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{51}}{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(x-5/2)}{\frac{\sqrt{51}}{2}}\right]+C = \mathbf{\frac{19}{\sqrt{51}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(2x-5)}{\sqrt{51}}+C}$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{19-5x+x^2}} = \mathbf{\frac{3}{2}\ln\left(19-5x+x^2\right)+\frac{19}{\sqrt{51}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(2x-5)}{\sqrt{51}}+C}$$

5. Calcular la $\int \frac{(2t+7)\,dt}{2t^2+2t+1}$.

De ello resulta:

$$12\int\frac{dt}{(2t+1)^2+1}=\frac{12}{2}\left[\frac{1}{1}\text{arc tg}\frac{(2t+1)}{1}\right]+C=\mathbf{6\ arc\ tg\ (2t+1)+C}$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral:

$$\therefore\int\frac{(2t+7)dt}{2t^2+2t+1}=\frac{1}{2}\ln\left(4t^2+4t+2\right)+6\text{ arc tg }(2t+1)+C$$

EJERCICIO IX

I. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, reducibles a inmediatas por sustitución algebraica.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\text{arc sen}\frac{(x+1)}{2}+C$

2. $\int\frac{dx}{5-2x+x^2}=\frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{(x-1)}{2}+C$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\text{arc sen }(x-1)+C$

4. $\int\frac{dx}{5-x^2-4x}=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x+5}{1-x}\right)+C$

5. $\int\frac{dx}{x^2-8x+7}=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-7}{x-1}\right)+C$

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}=\text{arc sen}\frac{(x+1)}{\sqrt{5}}+C$

7. $\int\frac{dx}{x^2-6x+5}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-5}{x-1}\right)+C$

8. $\int\frac{dx}{15+2x-x^2}=\frac{1}{8}\ln\left(\frac{3+x}{5-x}\right)+C$

9. $\int\frac{dx}{x^2-8x+15}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-5}{x-3}\right)+C$

10. $\int\frac{dt}{2at+t^2}=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{t}{t+2a}\right)+C$

11. $\int \frac{dy}{1+y+y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arc tg}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{10-4x+4x^2}} = \frac{1}{2} \ln\left[(2x-1) + \sqrt{10-4x+4x^2}\right] + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2+2x}} = \ln\left[(x+1) + \sqrt{5+x^2+2x}\right] + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}} = \ln\left[(x-1) + \sqrt{x^2-2x+8}\right] + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x+x^2}} = \ln\left[(x+2) + \sqrt{3+4x+x^2}\right] + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-10-x^2}} = -\ln\left[(x-1) + \sqrt{2x-10-x^2}\right] + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}} = \ln\left[(x-4) + \sqrt{x^2-8x+25}\right] + C$

18. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{4\theta^2+4\theta+5}} = \frac{1}{2} \ln\left[(2\theta+1) + \sqrt{4\theta^2+4\theta+5}\right] + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left[(3x-1) + \sqrt{3x^2-2x+4}\right] + C$

20. $\int \frac{5du}{\sqrt{5+2u+u^2}} = 5 \ln\left[(u+1) + \sqrt{5+2u+u^2}\right] + C$

21. $\int \sqrt{3x^2+4x+1}\, dx = \frac{(3x+2)}{2\sqrt{3}} \sqrt{3x^2+4x-1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left[(3x+2) + \sqrt{3x^2+4x+1}\right] + C$

22. $\int \sqrt{9x^6-3x^3-1}\, x^2 dx = \frac{(6x^3-1)}{36} \sqrt{9x^6-3x^3-1} - \frac{5}{72} \ln\left[(3x^3-1/2) + \sqrt{9x^6-3x^3-1}\right] + C$

23. $\int \sqrt{4x^2-12x+7}\, dx = \frac{(2x-3)}{4} \sqrt{4x^2-12x+7} - \frac{1}{2} \ln\left[(2x-3) + \sqrt{4x^2-12x+7}\right] + C$

24. $\int \frac{(3x+8)\, dx}{\sqrt{9x^2-3x-1}} = \frac{1}{3} \sqrt{9x^2-3x-1} + \frac{17}{6} \ln\left[(3x-1/2) + \sqrt{9x^2-3x-1}\right] + C$

25. $\int \sqrt{9x^2+12x+8}\, dx = \frac{(3x+2)}{6} \sqrt{9x^2+12x+8} - \frac{2}{3} \ln\left[(3x+2) + \sqrt{9x^2+12x+8}\right] + C$

26. $\int \sqrt{15+4x-x^2}\, dx = \frac{(x-2)}{2} \sqrt{15+4x-x^2} + \frac{19}{2} \text{arc sen}\left(\frac{x-2}{\sqrt{19}}\right) + C$

27. $\int \sqrt{1-x-2x^2}\,dx = \frac{(4x+1)}{8\sqrt{2}}\sqrt{1-x-2x^2} + \frac{9}{16\sqrt{2}}\text{arc sen}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

28. $\int \sqrt{3+2z-z^2}\,dz = \frac{(z-1)}{2}\sqrt{3+2z-z^2} + 2\,\text{arc sen}\left(\frac{z-1}{2}\right) + C$

29. $\int \sqrt{2+2x-x^2}\,dx = \frac{(x-1)}{2}\sqrt{2+2x-x^2} + \frac{3}{2}\text{arc sen}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

30. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \frac{(x+1)}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\,\text{arc sen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

31. $\int \sqrt{x^2+2x}\,dx = \frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x} + \frac{1}{2}\ln\left[(x+1)+\sqrt{x^2+2x}\right] + C$

32. $\int \sqrt{3t-2t^2}\,dt = \frac{(4t-3)}{8\sqrt{2}}\sqrt{3t-2t^2} + \frac{9}{16\sqrt{2}}\text{arc sen}\left(\frac{4t-3}{3}\right) + C$

33. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2-9}} = \sqrt{x^2-9} + 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right) + C$

34. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = 2\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$

35. $\int \frac{(3t-1)\,dt}{3t^2+9} = \frac{1}{2}\ln\left(3t^2+9\right) - \frac{1}{3}\text{arc tg}\frac{\sqrt{3}\,t}{3} + C$

36. $\int \frac{(7x-2)\,dx}{1+5x^2} = \frac{7}{10}\ln\left(1+5x^2\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\text{arc tg}\sqrt{5}\,x + C$

37. $\int \frac{(1-x)\,dx}{16-4x^2} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4+2x}{4-2x}\right) + \ln\left(16-4x^2\right)\right] + C$

38. $\int \frac{(x+5)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = 2\sqrt{x^2+2x+5} + 4\ln\left[(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right] + C$

39. $\int \frac{(2-x)\,dx}{\sqrt{4x^2-4x-3}} = -\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-4x-3} + \frac{3}{4}\ln\left[(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x-3}\right] + C$

40. $\int \frac{(3x-4)\,dx}{\sqrt{1-6x-9x^2}} = -\left[\frac{1}{3}\sqrt{1-6x-9x^2} + \frac{5}{3}\ln\left[(3x+1)+\sqrt{1-6x-9x^2}\right]\right] + C$

41. $\int \frac{(x+2)\,dx}{4x-x^2} = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(4x-x^2\right) + C$

42. $\int \frac{x\,dx}{27+6x-x^2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3+x}{9-x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(27+6x-x^2\right) + C$

43. $\int \frac{(3t+2)\,dt}{19-5t+t^2} = \frac{3}{2}\ln\left(19-5t+t^2\right) + \frac{19}{\sqrt{51}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-5}{\sqrt{51}}\right) + C$

44. $\int \frac{(8x-3)\,dx}{12x-4x^2-5} = \frac{9}{8}\ln\left(\frac{2x-1}{5-2x}\right) - \ln\left(12x-4x^2-5\right) + C$

45. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \sqrt{x^2-6x+5} + 5\ln\left[(x-3)+\sqrt{x^2-6x+5}\right] + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$
3. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+7}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$
5. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$
7. $\int \frac{dx}{x^2-8x}$
8. $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{12+4x-x^2}}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$
11. $\int \frac{dx}{12x-8-4x^2}$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$
13. $\int \frac{dx}{27+6x-x^2}$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+3}}$
15. $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$
16. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$
17. $\int \sqrt{28-12x-x^2}\,dx$
18. $\int \sqrt{9x^2-12x+8}\,dx$
19. $\int \sqrt{2x^2+2x+5}\,dx$
20. $\int \sqrt{30+10z+z^2}\,dz$
21. $\int \sqrt{20+8y-y^2}\,dy$
22. $\int \sqrt{2x^2+7x}\,dx$
23. $\int \sqrt{x^4+6x^2+5}\,x\,dx$
24. $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}$
25. $\int \frac{(10x-3)\,dx}{4+25x^2}$
26. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$
27. $\int \frac{(5-x)\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$
28. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{1+4x+5x^2}$
29. $\int \frac{(3x-5)\,dx}{3x^2+4x+1}$
30. $\int \frac{(x-7)\,dx}{\sqrt{x^2+8x+3}}$
31. $\int \frac{(x-4)\,dx}{\sqrt{x^2-5x+3}}$
32. $\int \frac{(2x-7)\,dx}{5x^2+3}$
33. $\int \frac{(x+3)\,dx}{1-x-x^2}$
34. $\int \frac{(x-2)\,dx}{2x^2+6x+5}$
35. $\int \frac{(x+1)\,dx}{3x^2+2x+1}$
36. $\int \sqrt{4x^2-4x-3}\,dx$

2.2 SOLUCIÓN DE INTEGRALES INDEFINIDAS, REDUCIBLES A INMEDIATAS POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Para resolver integrales indefinidas que contengan el radical $\sqrt{a^2 - u^2}$ o $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ y que son reducibles a integrales inmediatas por sustitución trigonométrica, se recomienda efectuar un cambio de variable, ya que es el método más corto para integrar tales expresiones.

El cambio de variable se realiza:

1. Cuando se tiene $\sqrt{a^2 - u^2}$, hágase $u = a \operatorname{sen} z$.
2. Cuando se tiene $\sqrt{u^2 + a^2}$, hágase $u = a \operatorname{tg} z$.
3. Cuando se tiene $\sqrt{u^2 - a^2}$, hágase $u = a \sec z$.

Estas sustituciones se emplean para demostrar las fórmulas de la [18] a la [24] del formulario general de integrales inmediatas.

También se hace notar que en cada caso el signo radical desaparece, es decir:

1. $\sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 z} = a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z} = a \cos z.$
2. $\sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 z} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z} = a \sec z.$
3. $\sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2} = a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a \operatorname{tg} z.$

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \frac{dx}{(5 - x^2)^{3/2}}$.

Solución:

De la integral propuesta, tenemos que:

$$u^2 = x^2 \qquad a^2 = 5$$
$$u = x \qquad a = \sqrt{5}$$
$$du = dx$$

Es decir $\int \frac{dx}{\left(5-x^2\right)^{3/2}} = \int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}$. Como se tiene $\left(a^2-u^2\right)^{3/2} = \sqrt{\left(a^2-u^2\right)^3}$, el cambio de variable que debe realizarse es: $u = a$ sen z, de donde $u^2 = a^2$ sen$^2 z$ y también $du = a\ \cos z\, dz$.

Efectuando la sustitución en la integral, tenemos que:

$$\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}} = \int \frac{a\cos z\, dz}{\left(a^2-a^2\,\text{sen}^2 z\right)^{3/2}} = \int \frac{a\cos z\, dz}{\left[a^2\left(1-\text{sen}^2 z\right)\right]^{3/2}}$$

Por la fórmula trigonométrica, se tiene que: $\mathbf{cos^2 z = 1 - sen^2 z}$

Sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{a\cos z\, dz}{\left[a^2\left(1-\text{sen}^2 z\right)\right]^{3/2}} = \int \frac{a\cos z\, dz}{\left(a^2\cos^2 z\right)^{3/2}} = \int \frac{a\cos z\, dz}{\left(a\cos z\right)^3} = \int \frac{dz}{\left(a\cos z\right)^2} = \int \frac{dz}{a^2\cos^2 z}$$

Por fórmula trigonométrica, se tiene que: $\mathbf{\frac{1}{cos^2 z} = sec^2 z}$

Sustituyendo en la integral, resulta: $\int \frac{dz}{a^2\cos^2 z} = \frac{1}{a^2} = \int \sec^2 z\, dz$

La integral resultante se parece a la fórmula [10], donde identificamos que:

$$v = z$$
$$dv = dz$$

$$\left.\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^2}}\int \mathbf{sec^2 z\, dz} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^2}}\,\mathbf{tg}\ \boldsymbol{z} + \boldsymbol{C}\ \right\}\ \textit{Resultado parcial}$$

De $u = a$ sen z, tenemos que: sen $z = \frac{u}{a} = \frac{\text{Op}}{\text{Hip}}$. Trazando un triángulo rectángulo y aplicando el *Teorema de Pitágoras*, resulta:

$$(\text{Ady})^2 = (\text{Hip})^2 - (\text{Op})^2$$
$$\text{Ady} = \sqrt{a^2-u^2}$$

$$\therefore\ \mathbf{tg}\ \boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2-u^2}}}$$

Aquí "Op" es el lado opuesto al ángulo, "Hip" es la hipotenusa y "Ady" es el lado adyacente al ángulo.

Sustituyendo el resultado parcial, tenemos que:

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{tg} z + C = \left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\right) + C = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$$

Sustituyendo los valores originales, resulta:

$$\therefore \int \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C \quad \Big\}\ \textit{Resultado final}$$

2. Hallar la $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2+4}}$.

Solución

De la integral propuesta, tenemos que:

$$u^2 = 9x^2 \qquad a^2 = 4$$
$$u = 3x \qquad a = 2$$
$$u/3 = x$$
$$du/3 = dx$$

Es decir: $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2+4}} = \int \frac{du/3}{u/3\ \sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}$

Como se tiene $\sqrt{u^2+a^2}$, el cambio de la variable que debe realizarse es: $u = a\ \operatorname{tg} z$, de donde $u^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 z$ y también $du = a \sec^2 z\, dz$.

Efectuando la sustitución en la integral, tenemos que:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 z\, dz}{a\operatorname{tg} z\sqrt{a^2+\operatorname{tg}^2 z + a^2}} = \int \frac{\sec^2 z\, dz}{\operatorname{tg} z\sqrt{a^2(\operatorname{tg}^2 z+1)}}$$

Por la fórmula trigonométrica, se tiene que: $\mathbf{\sec^2 z = tg^2 z + 1}$

Sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{\sec^2 z\, dz}{\operatorname{tg} z\sqrt{a^2(\operatorname{tg}^2 z+1)}} = \int \frac{\sec^2 z\, dz}{\operatorname{tg} z\sqrt{a^2\sec^2 z}} = \int \frac{\sec^2 z\, dz}{a\operatorname{tg} z\sec z} = \int \frac{\sec z\, dz}{a\operatorname{tg} z}$$

Por fórmula trigonométrica, se tiene que: $\mathbf{\sec z = \frac{1}{\cos z}}$ y $\mathbf{tg\, z = \frac{sen\, z}{\cos z}}$

Sustituyendo en la integral, obtenemos:

$$\int \frac{\sec z\, dz}{a \operatorname{tg} z} = \frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{1}{\cos z}\right) dz}{\left(\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{\operatorname{sen} z}$$

Por la fórmula trigonométrica, se tiene que: $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}\, z} = \mathbf{csc}\, z$

Sustituyendo en la integral, resulta: $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int \frac{dz}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{a}\int \csc z\, dz$

La integral resultante se parece a la fórmula 17, donde identificamos que:

$$v = z$$
$$dv = dz$$

$$\frac{1}{a}\int \csc z\, dz = \frac{1}{a}\ln(\csc z - \operatorname{ctg} z) + C = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{z}{2} + C \quad \Big\}\textit{Resultado parcial}$$

De $u = a \operatorname{tg} z$, tenemos que: $\operatorname{tg} z = \dfrac{u}{a} = \dfrac{\text{Op}}{\text{Ady}}$. Trazando un triángulo rectángulo y aplicando el *Teorema de Pitágoras*, resulta:

Hip = ?
Op = u
Ady = a
z

$$(\text{Hip})^2 = (\text{Op})^2 + (\text{Ady})^2 \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{a}{u}$$

$$\text{Hip} = \sqrt{u^2 + a^2} \qquad \therefore \quad \csc z = \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}$$

Sustituyendo en el resultado parcial, tenemos que:

$$\frac{1}{a}\ln(\csc z - \operatorname{ctg} z) + C = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} - \frac{a}{u}\right) + C = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u}\right) + C$$

Sustituimos los valores originales, y resulta:

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 + 4}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{9x^2 + 4} - 2}{3x}\right) + C \quad \Big\}\textit{Resultado final}$$

También: $\dfrac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\dfrac{z}{2} + C = \dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{\frac{u}{a}}{2}\right) + C = \dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{u}{2a}\right) + C$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 + 4}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3x}{4}\right) + C \quad \Big\}\textit{Resultado final}$$

3. Hallar la $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-11}}$.

Solución

De la integral propuesta, tenemos que: $u^2 = x^2$ $\quad a^2 = 11$

$u = x$ $\quad a = \sqrt{11}$

$du = dx$

Es decir: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-11}} = \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a}}$

Como se tiene $\sqrt{u^2-a^2}$, el cambio de variable que debe realizarse es: $u = a \sec z$, de donde $u^2 = a^2 \sec^2 z$ y también $du = a \sec z \operatorname{tg} z\, dz$.

Efectuamos la sustitución en la integral, y tenemos que:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{a \sec z \operatorname{tg} z\, dz}{a^2 \sec^2 z\sqrt{a^2\sec^2 z - a^2}} = \int \frac{\operatorname{tg} z\, dz}{a \sec z\sqrt{a^2(\sec^2 z - 1)}}$$

Por la fórmula trigonométrica, se tiene que: $\mathbf{tg^2\, z = sec^2 z - 1}$
Sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{\operatorname{tg} z\, dz}{a \sec z\sqrt{a^2(\sec^2 z - 1)}} = \int \frac{\operatorname{tg} z\, dz}{a \sec z\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 z}} = \int \frac{\operatorname{tg} z\, dz}{a^2 \sec z \operatorname{tg} z} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\sec z}$$

Por la fórmula trigonométrica, se tiene que: $\mathbf{\cos z = \frac{1}{\sec z}}$

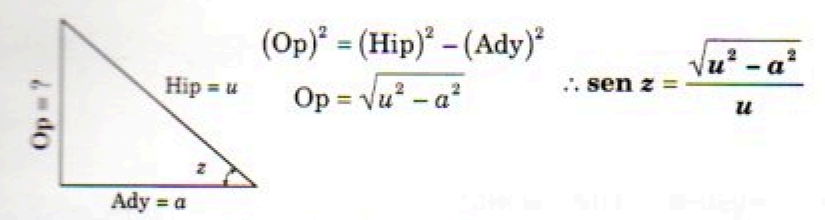
Sustituyendo en la integral, resulta: $\frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\sec z} = \frac{1}{a^2}\int \cos z\, dz$

La integral resultante se parece a la fórmula [9], donde identificamos que:

$$v = z$$
$$dv = dz$$

$$\frac{1}{a^2}\int \cos z\, dz = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen} z + C \quad \Big\} \textit{ Resultado parcial}$$

De $u = a \sec z$, tenemos que: $\sec z = \frac{u}{a} = \frac{\text{Hip}}{\text{Ady}}$. Trazando un triángulo rectángulo y aplicando el *Teorema de Pitágoras*, resulta:



$(\text{Op})^2 = (\text{Hip})^2 - (\text{Ady})^2$

$\text{Op} = \sqrt{u^2 - a^2}$

$\therefore \textbf{sen } z = \dfrac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}$

Sustituyendo en el resultado parcial, tenemos que:

$$\frac{1}{a^2}\text{sen } z + C = \left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\right) + C = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2\, u} + C$$

Sustituyendo los valores originales, resulta:

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 11}} = \frac{\sqrt{x^2 - 11}}{11x} + C \quad \Big\} \textit{ Resultado final}$$

4. Hallar la $\int \dfrac{\theta^2\, d\theta}{\left(4 - \theta^2\right)^{3/2}}$.

Solución

De la integral propuesta, tenemos que: $u^2 = \theta^2 \quad a^2 = 4$

$u = \theta \quad a = 2$

$du = d\theta$

Es decir: $\int \dfrac{\theta^2\, d\theta}{\left(4 - \theta^2\right)^{3/2}} = \int \dfrac{u^2\, du}{\left(a^2 - u^2\right)^{3/2}} = \int \dfrac{u^2\, du}{\sqrt{\left(a^2 - u^2\right)^3}}$

Como se tiene $\sqrt{\left(a^2 - u^2\right)^3}$, el cambio de variable que debe realizarse es $u = a \text{ sen } z$, de donde $u^2 = a^2 \text{ sen}^2 z$ y también $du = a \cos z\, dz$.

Efectuamos la sustitución en la integral, y tenemos:

$$\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{\left(a^2 - u^2\right)^3}} = \int \frac{a^2 \text{ sen}^2 z\; a \cos z\, dz}{\sqrt{\left(a^2 - a^2 \text{ sen}^2 z\right)^3}} = \int \frac{a^3 \text{sen}^2 z \cos z\, dz}{\sqrt{\left[a^2\left(1 - \text{sen}^2 z\right)\right]^3}}$$

Por la fórmula trigonométrica, se tiene que: $\mathbf{\cos^2 z = 1 - sen^2 z}$

Sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{a^3 \operatorname{sen}^2 z \cos z\, dz}{\sqrt{\left[a^2\left(1-\operatorname{sen}^2 z\right)\right]^3}} = \int \frac{a^3 \operatorname{sen}^2 z \cos z\, dz}{\sqrt{\left(a^2 \cos^2 z\right)^3}} = \int \frac{a^3 \operatorname{sen}^2 z \cos z\, dz}{a^3 \cos^3 z} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 z\, dz}{\cos^2 z}$$

Por la fórmula trigonométrica, se tiene que: $\mathbf{tg^2 z = \dfrac{sen^2 z}{cos^2 z}}$

Sustituyendo en la integral, resulta: $\int \frac{\operatorname{sen}^2 z\, dz}{\cos^2 z} = \int \operatorname{tg}^2 z\, dz$

Por la fórmula trigonométrica, tenemos: $\mathbf{tg^2 z = sec^2 z - 1}$

Sustituyendo en la integral, resulta: $\int \operatorname{tg}^2 z\, dz = \int \left(\sec^2 z - 1\right) dz = \underset{①}{\int \sec^2 z\, dz} - \underset{②}{\int dz}$

La integral ① se parece a la fórmula [10], donde identificamos que: $v = z$
$dv = dz$

$$\int \sec^2 z\, dz = \mathbf{tg\, z + C}$$

Para la integral ② aplicamos directamente la fórmula [1], resultando:

$$-\int dz = \mathbf{-z + C}$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos que el *resultado parcial* es:

$$\mathbf{\int sec^2 z\, dz - \int dz = tg\, z - z + C}$$

De $u = a \operatorname{sen} z$, tenemos que: $\operatorname{sen} z = \frac{u}{a} = \frac{\text{Op}}{\text{Hip}}$; también que: $z = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a}$.

Al trazar un triángulo rectángulo y aplicar el *Teorema de Pitágoras*, resulta:

Op = u
Hip = a
z
Ady = ?

$$(\text{Ady})^2 = (\text{Hip})^2 - (\text{Op})^2$$
$$\text{Ady} = \sqrt{a^2 - u^2}$$

$$\therefore \mathbf{tg\, z = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}}$$

Sustituyendo en el resultado parcial, tenemos que:

$$\operatorname{tg} z - z + C = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} - \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C$$

Sustituimos los valores originales, y resulta:

$$\therefore \int \frac{\theta^2\, d\theta}{\left(4-\theta^2\right)^{3/2}} = \frac{\theta}{\sqrt{4-\theta^2}} - \text{arc sen}\frac{\theta}{2} + C \quad \text{Resultado final}$$

5. Hallar la $\int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{y^2-9}}$.

Solución

En la integral propuesta, tenemos que:

$$u^2 = y^2 \qquad a^2 = 9$$
$$u = y \qquad a = 3$$
$$du = dy$$

Es decir: $\int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{y^2-9}} = \int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2-a^2}}$

Como se tiene $\sqrt{u^2-a^2}$, el cambio de variable que debe realizarse es $u = a \sec z$, de donde $u^2 = a^2 \sec^2 z$ y también $du = a \sec z \operatorname{tg} z\, dz$.
Efectuamos la sustitución en la integral y tenemos que:

$$\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{a^2 \sec^2 z\, a \sec z \operatorname{tg} z\, dz}{\sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2}} = \int \frac{a^3 \sec^3 z \operatorname{tg} z\, dz}{\sqrt{a^2\left(\sec^2 z - 1\right)}}$$

Por la fórmula trigonométrica, se tiene que: $\operatorname{tg}^2 z = \sec^2 z - 1$
Sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{a^3 \sec^3 z \operatorname{tg} z\, dz}{\sqrt{a^2\left(\sec^2 z - 1\right)}} = \int \frac{a^3 \sec^3 z \operatorname{tg} z\, dz}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 z}} = \int \frac{a^3 \sec^3 \operatorname{tg} z\, dz}{a \operatorname{tg} z} = a^2 \int \sec^3 z\, dz$$

Esta integral se resuelve por el método de *integración por partes* que se analizará en el siguiente tema.

EJERCICIO X

I. Comprobar las siguientes integrales indefinidas reducibles a inmediatas por sustitución trigonométrica.

1. $\int \frac{dx}{\left(7-x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{7\sqrt{7-x^2}} + C$

2. $\int \frac{dz}{\left(z^2+6\right)^{3/2}} = \frac{z}{6\sqrt{z^2+6}} + C$

3. $\int \frac{d\theta}{\theta^2\sqrt{13-\theta^2}} = -\frac{\sqrt{13-\theta^2}}{13\theta} + C$

4. $\int \frac{y^2\,dy}{\left(y^2+3\right)^{3/2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{y^2+3}+y}{\sqrt{3}}\right) - \frac{y}{\sqrt{y^2+3}} + C$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}\right) + C$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{m^2-x^2}} = \frac{1}{m}\ln\left(\frac{\sqrt{m^2-x^2}-m}{x}\right) + C$

7. $\int \frac{5x^2\,dx}{\left(16-x^2\right)^{3/2}} = \frac{5x}{\sqrt{16-x^2}} - 5 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{4} + C$

8. $\int \frac{\sqrt{x^2+25}\,dx}{x} = 5\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+25}-5}{x}\right) + \sqrt{x^2+25} + C$

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C$

10. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{11-y^2}} = -\frac{\sqrt{11-y^2}}{11y} + C$

11. $\int \frac{dx}{\left(9-x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$

12. $\int \frac{\sqrt{64-x^2}\,dx}{x} = 8\ln\left(\frac{8-\sqrt{64-x^2}}{x}\right) + \sqrt{64-x^2} + C$

13. $\int \frac{\sqrt{u^2-9}\,du}{u} = \sqrt{u^2-9} - 3\,\text{arc sen}\,\frac{u}{3} + C$

14. $\int \frac{dy}{y\sqrt{9y^2+16}} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{9y^2+16}-3y}{3y}\right) + C$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{x}{2} + C$

16. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-16} - 4\,\text{arc cos}\,\frac{4}{x} + C$

17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u}\right) + C$

18. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}\,dx}{x^2} = \ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right) - \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}} = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-16}}{4}\right) + C$

20. $\int \frac{dy}{(6-y^2)^{3/2}} = \frac{y}{6\sqrt{6-y^2}} + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

2. $\int \omega^2\sqrt{16-\omega^2}\,d\omega$

3. $\int \frac{\sqrt{9-y^2}}{y^2}dy$

4. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}}$

6. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}$

7. $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-4}}$

8. $\int \frac{y^2dy}{\sqrt{16-y^2}}$

9. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{6+x^2}}$

10. $\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta^4-16}}$

11. $\int \frac{du}{u^4\sqrt{u^2+25}}$

12. $\int \frac{dy}{(y^2+4)^{3/2}}$

13. $\int \frac{e^{-x}\,dx}{(16e^{-2x}+4)^{3/2}}$

14. $\int \frac{dx}{(25x^2-4)^{3/2}}$

15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

2.3 SOLUCIÓN DE INTEGRALES INDEFINIDAS POR EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES EN SUS DIFERENTES CASOS

Integración por partes

Con base en la fórmula para la diferenciación de un producto y considerando u y v como funciones de una misma variable independiente, tenemos:

$$d\,(uv) = udv + vdu$$

Por transposición de términos, obtenemos: $udv = d(uv) - vdu$

Al integrar directamente, tenemos: $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$

La expresión anterior se denomina *fórmula de integración por partes*.

Cuando no podemos integrar directamente $u\,dv$, la fórmula de integración por partes hace que su integración dependa de dv y $v\,du$, que suelen ser formas fáciles y posibles de integración.

El método de *integración por partes* es uno de los de mayor aplicación del cálculo integral.

Para aplicar la fórmula de integración por partes en un caso dado, es necesario descomponer la diferencial dada en dos factores, es decir, en u y dv. Aunque no existen instrucciones generales que faciliten la elección de dichos factores, recomendamos los siguientes pasos para escoger los factores u y dv.

1. dx es siempre una parte de dv.
2. Debe ser posible integrar dv.
3. Cuando la expresión para integrar es el producto de dos funciones, lo mejor es seleccionar la de apariencia más compleja, con tal que pueda integrarse, como parte de dv.

EJEMPLOS

Caso I. Hallar la $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, seleccionamos la de apariencia más compleja, para integrarla como parte de dv, es decir:

Sean $\quad u = x \quad$ y $\quad dv = \operatorname{sen} x\, dx$

$du = dx \qquad \int dv = \int \operatorname{sen} x\, dx$

$v = -\cos x$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx$$

$$\boldsymbol{\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx} \quad \text{Ⓐ}$$

La expresión $\int \cos x\, dx$ se parece a la fórmula [9], donde identificamos: $v = x$
$dv = dx$

Es decir: $\boldsymbol{\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C}$ Ⓑ

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral Ⓐ y Ⓑ, tenemos que:

$$\boldsymbol{\therefore \int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C}$$

Caso II. Hallar la $\int x \ln x\, dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, seleccionamos la de apariencia más compleja, para integrarse como parte de dv, es decir:

Sean: $\quad u = x \quad$ y $\quad dv = \ln x\, dx$

$du = dx \qquad \int dv = \int \ln x\, dx$

$v = \,?$

Observamos que la $\int \ln x\, dx$ no puede integrarse en forma directa, por lo que este hecho indica que no hemos seleccionado adecuadamente los factores u y dv.

Entonces:

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = x\,dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad \int dv = \int x\,dx$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \ln x\,dx = (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{dx}{x}\right)$$

$$\boldsymbol{\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx} \quad ①$$

La expresión $-\frac{1}{2}\int x\,dx$ se parece a la fórmula $\boxed{4}$, donde: $v = x$ $\quad n = 1$

$dv = dx$

Es decir: $\boldsymbol{-\frac{1}{2}\int x\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C = -\frac{x^2}{4} + C}$ ②

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral ① y ②, tenemos que:

$$\boldsymbol{\therefore \int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C}$$

Caso III. Hallar la $\int x\,e^{2x}dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, seleccionamos la de apariencia más compleja, para integrarla como parte de dv, es decir:

Sean $\quad u = x \qquad \text{y} \qquad dv = e^{2x}dx$

$$du = dx \qquad \int dv = \int e^{2x}dx$$

$$v = \frac{e^{2x}}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\,e^{2x}dx = x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) - \int \frac{e^{2x}}{2}dx$$

$$\int \boldsymbol{x\,e^{2x}dx = \frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx} \qquad \text{Ⓐ}$$

La expresión $-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx$ se parece a la fórmula $\boxed{7}$, donde: $v = 2x$

$dv = 2dx$

Es decir: $\boldsymbol{-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)e^{2x} + C = -\frac{e^{2x}}{4} + C}$ Ⓑ

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral Ⓐ y Ⓑ, tenemos que:

$$\therefore \boldsymbol{\int x\,e^{2x}dx = \frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C}$$

Caso IV. Hallar la $\int x^2 a^{2x}dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, seleccionamos la de apariencia más compleja, para integrarla como parte de dv:

Sean $u = x^2$ y $dv = a^{2x}dx$

$du = 2x\,dx$ $\qquad \int dv = \int a^{2x}dx$

$$v = \frac{a^{2x}}{2\ln a}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 a^{2x}dx = x^2\left(\frac{a^{2x}}{2\ln a}\right) - \int\left(\frac{a^{2x}}{2\ln a}\right)2x\,dx$$

$$\boldsymbol{\int x^2 a^{2x}dx = \frac{x^2 a^{2x}}{2\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int x\,a^{2x}dx} \qquad \text{Ⓐ}$$

Para la expresión $-\dfrac{1}{\ln a}\int x\, a^{2x} dx$ aplicaremos la fórmula de integración por partes nuevamente, identificando: $u = x$ y $dv = a^{2x} dx$

$$du = dx \qquad \int dv = \int a^{2x} dx$$

$$v = \frac{a^{2x}}{2 \ln a}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$-\frac{1}{\ln a}\int x\, a^{2x} dx = -\frac{1}{\ln a}\left[x\left(\frac{a^{2x}}{2 \ln a}\right) - \int\left(\frac{a^{2x}}{2 \ln a}\right) dx\right]$$

$$-\frac{1}{\ln a}\int x\, a^{2x} dx = -\frac{x\, a^{2x}}{2(\ln a)^2} + \frac{1}{2(\ln a)^2}\int a^{2x} dx \quad \text{(B)}$$

La expresión $\dfrac{1}{2(\ln a)^2}\int a^{2x} dx$ se parece a la fórmula $\boxed{6}$, donde: $v = 2x$

$dv = 2\, dx$

Es decir: $\dfrac{1}{2(\ln a)^2}\int a^{2x} dx = \left[\dfrac{1}{2(\ln a)^2}\right]\left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{a^{2x}}{\ln a} + C$

$$\frac{1}{2(\ln a)^2}\int a^{2x} dx = \frac{a^{2x}}{4(\ln a)^3} + C \quad \text{(C)}$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral (A), (B) y (C), tenemos que:

$$\therefore \int x^2 a^{2x} dx = \frac{x^2 a^{2x}}{2 \ln a} - \frac{x\, a^{2x}}{2(\ln a)^2} + \frac{a^{2x}}{4(\ln a)^3} + C = \frac{a^{2x}}{2 \ln a}\left(x^2 - \frac{x}{\ln a} + \frac{1}{2 \ln^2 a}\right) + C$$

Caso V. Hallar la $\int \sec^3 z\, dz$.

Solución

Esta expresión, que resulta de una integral indefinida, reducible a inmediata por sustitución trigonométrica, había quedado pendiente de resolverse en el objetivo anterior.

Escribiendo la expresión $\int \sec^3 z\, dz$, como el producto de dos funciones, tenemos: $\int \sec^3 z\, dz = \int \sec^2 z \sec z\, dz$. Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, seleccionamos la de apariencia más compleja, para integrarla como parte de dv, es decir:

Sean $\quad u = \sec z \qquad$ y $\qquad dv = \sec^2 z\, dz$

$$du = \sec z \operatorname{tg} z\, dz \qquad \int dv = \int \sec^2 z\, dz$$

$$v = \operatorname{tg} z$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int \sec^2 z \sec z\, dz = \sec z \operatorname{tg} z - \int \operatorname{tg} z (\sec z \operatorname{tg} z) dz$$

$$\int \sec^2 z \sec z\, dz = \sec z \operatorname{tg} z - \int \operatorname{tg}^2 z \sec z\, dz \quad ①$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\operatorname{tg}^2 z = \sec^2 z - 1$, en la expresión $-\int \operatorname{tg}^2 z \sec z\, dz$, tenemos:

$$-\int \operatorname{tg}^2 z \sec z\, dz = -\int (\sec^2 z - 1) \sec z\, dz = -\int \sec^3 z\, dz + \int \sec z\, dz \quad ②$$

La expresión $\int \sec z\, dz$ se parece a la fórmula [16], donde identificamos: $v = z$, $dv = dz$

Es decir: $\int \sec z\, dz = \ln(\sec z + \operatorname{tg} z) + C \quad ③$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral ①, ② y ③, tenemos que:

$$\int \sec^3 z\, dz = \sec z \operatorname{tg} z + \ln(\sec z + \operatorname{tg} z) + C - \int \sec^3 z\, dz$$

$$\int \sec^3 z\, dz + \int \sec^3 z\, dz = \sec z \operatorname{tg} z + \ln(\sec z + \operatorname{tg} z) + C$$

$$2 \int \sec^3 z\, dz = \sec z \operatorname{tg} + \ln(\sec z + \operatorname{tg} z) + C$$

$$\therefore \int \sec^3 z\, dz = \frac{\sec z \operatorname{tg} z + \ln(\sec z + \operatorname{tg} z)}{2} + C = \frac{\sec z \operatorname{tg} z}{2} + \frac{\ln(\sec z + \operatorname{tg} z)}{2} + C$$

Caso VI. Hallar la $\int e^{2x} \operatorname{sen} ax\, dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, seleccionamos la de apariencia más compleja, para integrarla como parte de dv, es decir:

Sean $u = e^{2x}$ y $dv = \text{sen}\, ax\, dx$

$du = 2e^{2x}dx$ $\qquad \int dv = \int \text{sen}\, ax\, dx$

$$v = -\frac{\cos ax}{a}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\, dv = uv - \int v\ du$$

$$\int e^{2x}\ \text{sen}\, ax\, dx = e^{2x}\left(-\frac{\cos ax}{a}\right) - \int\left(-\frac{\cos ax}{a}\right) 2e^{2x} dx$$

$$\int e^{2x}\ \text{sen}\, ax\, dx = -\frac{e^{2x}\cos ax}{a} + \frac{2}{a}\int e^{2x}\ \cos ax\, dx \quad \text{(A)}$$

Para la expresión $\frac{2}{a}\int e^{2x}\cos ax\, dx$ aplicaremos la fórmula de integración por partes nuevamente, identificando: $u = e^{2x}$ y $dv = \cos ax\, dx$

$du = 2e^{2x}dx \qquad \int dv = \int \cos ax\, dx$

$$v = \frac{\text{sen}\, ax}{a}$$

Sustituimos en la fórmula de integración por partes, y tenemos que:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\frac{2}{a}\int e^{2x}\cos ax\, dx = \frac{2}{a}\left[e^{2x}\left(\frac{\text{sen}\, ax}{a}\right) - \int\left(\frac{\text{sen}\, ax}{a}\right) 2e^{2x} dx\right]$$

$$\frac{2}{a}\int e^{2x}\ \cos ax\, dx = \frac{2e^{2x}\ \text{sen}\, ax}{a^2} - \frac{4}{a^2}\int e^{2x}\ \text{sen}\, ax\, dx \quad \text{(B)}$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral (A) y (B), tenemos que:

$$\int e^{2x}\ \text{sen}\, ax\, dx = -\frac{e^{2x}\cos ax}{a} + \frac{2e^{2x}\text{sen}\, ax}{a^2} - \frac{4}{a^2}\int e^{2x}\text{sen}\, ax\, dx$$

$$\int e^{2x}\ \text{sen}\, ax\, dx + \frac{4}{a^2}\int e^{2x}\text{sen}\, ax\, dx = -\frac{e^{2x}\cos ax}{a} + \frac{2e^{2x}\text{sen}\, ax}{a^2}$$

$$\int e^{2x}\ \text{sen}\, ax\, dx\left(1 + \frac{4}{a^2}\right) = \frac{e^{2x}}{a}\left(\frac{2\ \text{sen}\, ax}{a} - \cos ax\right) + C$$

$$\int e^{2x}\text{sen}\,ax\,dx = \frac{\dfrac{e^{2x}}{a}\left(\dfrac{2\,\text{sen}\,ax}{a} - \cos ax\right)}{\left(1+\dfrac{4}{a^2}\right)} + C = \frac{\dfrac{e^{2x}}{a}\left(\dfrac{2\,\text{sen}\,ax - a\cos ax}{a}\right)}{\left(\dfrac{a^2+4}{a^2}\right)} + C$$

$$\therefore \int \boldsymbol{e^{2x}\textbf{sen}\,ax\,dx} = \frac{\dfrac{e^{2x}}{a^2}(\textbf{2sen}\,ax - a\cos ax)}{\left(\dfrac{a^2+4}{a^2}\right)} + C = \frac{e^{2x}(\textbf{2sen}\,ax - a\cos ax)}{a^2+4} + C$$

Caso VII. Hallar la $\int \text{arc tg}\,x\,dx$.

Solución

Se debe observar que, aparentemente, la expresión dada no representa el producto de dos funciones; sin embargo, sí lo es; también cabe señalar que ordinariamente se nos aconseja seleccionar a la función de apariencia más compleja, para integrarla como parte de *dv*; sin embargo, como sucedió en el *caso II*, no siempre este consejo resulta ser el correcto para determinar la integral.

Por lo anterior, tenemos: $u = \text{arc tg}\,x$ y $dv = dx$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int dv = \int dx$$

$$v = x$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \text{arc tg}\,x\,dx = (\text{arc tg}\,x)(x) - \int x\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$$

$$\int \textbf{arc tg}\,x\,dx = x\,\textbf{arc tg}\,x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} \quad ①$$

La expresión $-\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$ **se parece a la fórmula** $\boxed{5}$**, donde:** $v = 1+x^2$

$dv = 2x\,dx$

Es decir: $-\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$ ②

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral (① y ②), tenemos que:

$$\therefore \int \textbf{arc tg}\,x\,dx = x\,\textbf{arc tg}\,x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

Caso VIII. Hallar la $\int \frac{\ln(x+a)\,dx}{\sqrt{x+a}}$.

Solución

Tomando como ejemplo al *caso II*, tenemos que:

Sean $u = \ln(x+a)$ y $dv = \frac{dx}{\sqrt{x+a}}$

$$du = \frac{dx}{(x+a)} \qquad \int dv = \int \frac{dx}{\sqrt{x+a}}$$

$$v = 2\sqrt{x+a}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \frac{\ln(x+a)\,dx}{\sqrt{x+a}} = 2\sqrt{x+a}\,\ln(x+a) - \int 2\sqrt{x+a}\left[\frac{dx}{(x+a)}\right]$$

$$\int \frac{\ln(x+a)\,dx}{\sqrt{x+a}} = 2\sqrt{x+a}\,\ln(x+a) - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}} \qquad (A)$$

A la expresión $-2\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}}$ le aplicamos la fórmula $\boxed{4}$, resultando:

$$-2\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}} = -4\sqrt{x+a} + C \qquad (B)$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral ((A) y (B)), tenemos que:

$$\therefore \int \frac{\ln(x+a)\,dx}{\sqrt{x+a}} = 2\sqrt{x+a}\,\ln(x+a) - 4\sqrt{x+a} + C = 2\sqrt{x+a}\,[\ln(x+a) - 2] + C$$

Aplicaciones del método de integración por partes

1. En diferenciales que contienen productos.
2. En diferenciales que contienen logaritmos.
3. En diferenciales que contienen funciones trigonométricas inversas.

EJERCICIO XI

I. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integració por partes.

1. $\int x\cos x\,dx = x\,\text{sen}\,x + \cos x + C$

2. $\int \ln ax\,dx = x(\ln ax - 1) + C$

3. $\int x\sec^2 x\,dx = x\,\text{tg}\,x + \ln(\cos x) + C$

4. $\int ze^z dz = e^z(x-1) + C$

5. $\int \text{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\text{sen}\,2\theta + C$

6. $\int \frac{\ln x\,dx}{(1+x^2)} = \frac{x}{1+x}\ln x - \ln(1+x) + C$

7. $\int x^2\ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$

8. $\int y\,a^y dy = \frac{a^y}{\ln a}\left(y - \frac{1}{\ln a}\right) + C$

9. $\int z^n \ln z\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\left(\ln z - \frac{1}{n+1}\right) + C$

10. $\int x^2 e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$

11. $\int \frac{\theta e^\theta d\theta}{(1+\theta)^2} = \frac{e^\theta}{1+\theta} + C$

12. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[x^2 - \frac{2(1-x^2)}{3}\right] + C$

13. $\int xe^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

14. $\int x\cos 2x\,dx = \frac{\cos 2x}{4} + \frac{x\,\text{sen}\,2x}{2} + C$

15. $\int e^x \cos x\, dx = \dfrac{e^x}{2}(\text{sen } x + \cos x) + C$

16. $\int x^3 e^{x^2}\, dx = \dfrac{e^{x^2}}{2}\left(x^2 - 1\right) + C$

17. $\int y^2 e^{-3y} dy = -\dfrac{1}{3e^{3y}}\left(y^2 + \dfrac{2y}{3} + \dfrac{2}{9}\right) + C$

18. $\int e^{-x} \cos \pi x\, dx = \dfrac{(\pi \text{ sen } \pi x - \cos \pi x)}{e^x\left(\pi^2 + 1\right)} + C$

19. $\int y \text{ sen} \dfrac{y}{a} dy = -ay \cos \dfrac{y}{a} + a^2 \text{sen} \dfrac{y}{a} + C$

20. $\int x^2 \text{sen } nx\, dx = \dfrac{2 \cos nx}{n^3} + \dfrac{2x \text{ sen } nx}{n^2} - \dfrac{x^2 \cos nx}{n} + C$

21. $\int t\sqrt{t+1}\, dt = \dfrac{2}{3}(t+1)^{3/2}\left[t - \dfrac{2}{5}(t+1)\right] + C$

22. $\int z \sec^2 3z\, dz = \dfrac{1}{3}\left[z \text{ tg } 3z + \dfrac{1}{3}\ln(\cos 3z)\right] + C$

23. $\int \text{arc sec } x\, dx = x \text{ arc sec } x - \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + C$

24. $\int \text{arc sen } y\, dy = y \text{ arc sen } y + \sqrt{1 - y^2} + C$

25. $\int \text{arc ctg } x\, dx = x \text{ arc ctg } x + \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$

26. $\int x \text{ arc sen } x^2\, dx = \dfrac{x^2}{2} \text{arc sen } x^2 + \dfrac{\sqrt{1 - x^4}}{2} + C$

27. $\int \text{sen}(\ln x)\, dx = \dfrac{x}{2}[\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

28. $\int \text{arc cos } 2\theta\, d\theta = \theta \text{ arc cos } 2\theta - \dfrac{\sqrt{1 - 4\theta^2}}{2} + C$

29. $\int \sec^5 z\, dz = \dfrac{1}{4}\sec^3 z \text{ tg } z - \dfrac{3}{8}[\sec z \text{ tg } z + \ln(\sec z + \text{tg } z)] + C$

30. $\int \text{arc csc} \dfrac{z}{2} dz = z \text{ arc csc} \dfrac{z}{2} + 2\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 4}\right) + C$

31. $\int \text{arc tg}\sqrt{y}\, dy = (y+1)\,\text{arc tg}\sqrt{y} - \sqrt{y} + C$

32. $\int t^2\sqrt{1-t}\, dt = -\dfrac{2}{105}(1-t)^{3/2}\left(15t^2+12t+8\right)+C$

33. $\int \text{sen}\, x\, \text{sen}\, 3x\, dx = \dfrac{1}{8}\text{sen}\, 3x \cos x - \dfrac{3}{8}\text{sen}\, x \cos 3x + C$

34. $\int e^{ay}\cos 2y\, dy = \dfrac{e^{ay}(2\,\text{sen}\, 2y + a\cos 2x)}{a^2+4} + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \csc^3 x\, dx$
2. $\int e^{3\theta}\cos\dfrac{\theta}{3}\, d\theta$
3. $\int z\sec^2\dfrac{z}{2}\, dz$
4. $\int y\cos^2 2y\, dy$
5. $\int \text{arc}\cos mx\, dx$
6. $\int \text{arc sen}\, ax\, dx$
7. $\int \left(e^{\theta}+2\theta\right)^2 d\theta$
8. $\int \dfrac{x\,\text{arc}\cos x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $\int x^3\log x\, dx$
10. $\int \text{arc sen}\, ax\, dx$
11. $\int \text{arc tg}\dfrac{1}{x}\, dx$
12. $\int \text{arc sen}\dfrac{1}{x}\, dx$
13. $\int \text{arc sec}\dfrac{1}{x}\, dx$
14. $\int \dfrac{\text{arc tg}\sqrt{t}}{t^2}\, dt$
15. $\int x^3\,\text{arc ctg}\, x\, dx$
16. $\int \left(a^x+x^2\right)^2 dx$
17. $\int e^{-x}\text{sen}\dfrac{x}{2}\, dx$
18. $\int \dfrac{\log x\, dx}{x}$
19. $\int e^{\frac{y}{3}}\,\text{sen}\,\pi y\, dy$
20. $\int e^{-\frac{x}{2}}\cos 2x\, dx$
21. $\int e^{\frac{x}{4}}\cos \pi x\, dx$
22. $\int e^{-\frac{y}{5}}\text{sen}\dfrac{\pi y}{5}\, dy$
23. $\int \text{arc}\cos\sqrt{\dfrac{t}{2}}\, dt$
24. $\int \text{arc}\csc mx\, dx$
25. $\int \text{arc ctg}\dfrac{x}{4}\, dx$
26. $\int \cos(\ln x)\, dx$
27. $\int (\log x)^2 dx$
28. $\int e^{-x}\text{sen}\, 2x\, dx$
29. $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$
30. $\int \text{tg}(\ln x)\, dx$
31. $\int (\text{arc sec}\, x)^2 dx$
32. $\int (\ln x)^2\, dx$
33. $\int e^{bx}\text{sen}\, ax\, dx$
34. $\int x^2\ln x\, dx$
35. $\int \text{arc verso}\, x\, dx$
36. $\int x\log x\, dx$

2.4 SOLUCIÓN DE INTEGRALES INDEFINIDAS POR EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POR FRACCIONES PARCIALES

Integración de fracciones racionales

Una fracción racional se define como el cociente de dos funciones racionales enteras, es decir, funciones polinomiales en que la variable no está afectada por exponentes negativos o fraccionarios.

Función racional $\left\{ \boldsymbol{R(x)} = \dfrac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}} \right.$ $\to$ *Función polinomial (numerador)* / $\to$ *Función polinomial (denominador)*

Si el grado del numerador $P(x)$ es igual o mayor que el del denominador $Q(x)$, tenemos una *fracción impropia;* si además dividimos el numerador entre el denominador, obtenemos una *expresión mixta* (un *polinomio* y una *fracción propia*).

EJEMPLO

Fracción impropia o racional $\left\{ \dfrac{x^5 - 5x^3 + 7x^2 - 5}{x^3 - 8} = \underbrace{\overbrace{x^2 - 5}^{\text{Polinomio}} + \overbrace{\dfrac{15x^2 - 45}{x^3 - 8}}^{\text{Fracción propia}}}_{\text{Expresión mixta}} \right.$

El último término es una fracción reducida (fracción propia) a su más simple expresión, en la cual el grado del numerador $P(x)$ es menor que el grado del denominador $Q(x)$. Los otros términos pueden integrarse directamente; por tanto, lo único que hay que hacer es integrar la fracción reducida, es decir:

$$\int \frac{15x^2 - 45}{x^3 - 8}\, dx.$$

Para integrar una expresión diferencial que contenga la fracción racional, por lo general es necesario escribirla como la suma de *fracciones parciales*. Los denominadores de las fracciones parciales se obtienen factorizando el denominador $Q(x)$ como un producto de factores lineales y cuadráticos; lo anterior es siempre posible si aplicamos el siguiente teorema algebraico: *Todo polinomio con coeficientes reales puede ser expresado como un producto de factores lineales y cuadráticos, de manera que cada uno de los factores tenga coeficientes reales.*

Podemos suponer que si el denominador $Q(x)$ es un polinomio de grado n, entonces el coeficiente C_0 de x^n es 1 ya que si $Q(x) = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$, entonces si $C_0 \neq 1$, dividimos el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$ de la fracción racional $P(x)/Q(x)$ entre el coeficiente C_0:

Caso I. ***Los factores del denominador son todos de primer grado (lineales), y ninguno se repite.***

En este caso, tenemos una descomposición en fracciones parciales de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_2)} + \frac{C}{(x-a_3)} + \ldots + \frac{K}{(x-a_i)} + \ldots$$

Aquí no debe haber dos a_i idénticas, y $A, B, C, \ldots K, \ldots$ son constantes que van a ser determinadas. Se hace notar que el número de constantes por determinar es igual al grado del denominador.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3 - x^2 - 2x}$.

Solución

En la fracción factorizamos el denominador, y tenemos:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{4x-2}{x\left(x^2-x-2\right)} = \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)} \Bigg\} \textit{Ecuación I}$$

La *ecuación I* es una *identidad* para toda x (excepto $x = 0, 2, -1$).

Quitamos los denominadores para obtener:

$$4x - 2 = A(x-2)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-2)$$

$$4x - 2 = A(x^2 - x - 2) + B(x^2 + x) + C(x^2 - 2x)$$

$$4x - 2 = Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx$$

$$4x - 2 = (A + B + C)\,x^2 + (B - A - 2C)\,x - 2A \quad \} \ \textit{Ecuación II}$$

La *ecuación II* es una *identidad,* la cual es cierta para todos los valores de x, incluyendo 0, 2 y –1, es decir:

Si $x = 0$, resulta: $4(0) - 2 = (A + B + C)(0)^2 + (B - A - 2C)(0) - 2A$

$$-2 = -2A$$

$$\therefore \boldsymbol{A = 1}$$

Si $x = 2$, resulta: $4(2) - 2 = (A + B + C)(2)^2 + (B - A - 2C)(2) - 2A$

$$6 = 4A + 4B + 4C + 2B - 2A - 4C - 2A$$

$$6 = 6B$$

$$\therefore \boldsymbol{B = 1}$$

Si $x = -1$, resulta: $4(-1) - 2 = (A + B + C)(-1)^2 + (B - A - 2C)(-1) - 2A$

$$-6 = A + B + C - B + A + 2C - 2A$$

$$-6 = 3C$$

$$\therefore \boldsymbol{C = -2}$$

Existe otro método para determinar los valores de las constantes A, B y C que consiste en igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en ambos miembros de la *ecuación II,* lo que da lugar a tres ecuaciones simultáneas:

Para obtener la *primera* ecuación, observamos que el coeficiente de x^2 en el miembro de la derecha es $(A + B + C)$ y en el miembro de la izquierda no existe, por lo que se considera como coeficiente al cero.

$$\boldsymbol{A + B + C = 0}$$

Para obtener la *segunda* ecuación, notamos que el coeficiente de x en el miembro de la derecha es $(B - A - 2C)$ y en el miembro de la izquierda es 4.

$$\boldsymbol{B - A - 2C = 4}$$

Para obtener la *tercera* ecuación, observamos que en el miembro de la derecha sólo queda el elemento constante $-2A$, y el elemento constante en el miembro de la izquierda es -2.

$$\boldsymbol{-2A = -2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas, resulta: $A = 1$, $B = 1$ y $C = -2$.

Sustituimos estos valores en la *ecuación I*, y obtenemos:

$$\frac{4x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{4x - 2}{x\left(x^2 - x - 2\right)} = \frac{4x - 2}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x - 2)} - \frac{2}{(x + 1)}$$

Por lo tanto, nuestra integral queda expresada por:

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{(x-2)} - 2\int \frac{dx}{(x+1)}$$

Resolvemos directamente cada integral, y resulta:

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x} = \ln x + \ln(x-2) - 2\ln(x+1) + C$$

Y aplicamos las leyes de los logaritmos para obtener:

$$\therefore \int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x} = \ln \frac{x(x-2)}{(x+1)^2} + C = \ln \frac{x^2-2x}{(x+1)^2} + C$$

2. Hallar la $\int \frac{(7x^2-9x-1)\,dx}{x^3-2x^2-x+2}$.

Solución

En primer lugar hay que descomponer en factores de primer grado el denominador x^3-2x^2-x+2, es decir, hallar las raíces del polinomio dado.

Con base en el teorema algebraico, sabemos que una de las raíces es 2, por lo que uno de los factores es $(x-2)$; entonces para obtener los otros factores, tenemos:

$$\begin{array}{r|l} & x^2-1 \\ x-2 & x^3-2x^2-x+2 \\ & -x^3+2x^2 \\ & \qquad -x+2 \\ & \qquad +x-2 \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

Es decir, $(x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$ es la factorización buscada; por lo tanto resulta:

$$\left.\frac{7x^2-9x-1}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{7x^2-9x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)}\right\} \textit{Ecuación I}$$

La *ecuación I* es una *identidad* para toda x (excepto $x = 1, 2, -1$).

Quitando denominadores, obtenemos:

$$7x^2-9x-1 = A(x-1)(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)(x-1)$$
$$7x^2-9x-1 = A(x^2-1) + B(x^2-x-2) + C(x^2-3x+2)$$
$$7x^2-9x-1 = (A+B+C)x^2 + (-B-3C)x - A - 2B + 2C \;\} \; \textit{Ecuación II}$$

La *ecuación II* es una *identidad,* cierta para todos los valores de x incluyendo 1, 2 y -1, es decir:

Si $\mathbf{x = 1}$, resulta: $7(1)^2 - 9(1) - 1 = (A + B + C)(1)^2 + (-B - 3C)(1) - A - 2B + 2C$

$$-3 = A + B + C - B - 3C - A - 2B + 2C$$
$$-3 = -2B$$
$$\therefore \mathbf{B = \frac{3}{2}}$$

Si $\mathbf{x = 2}$, resulta: $7(2)^2 - (9)2 - 1 = (A + B + C)(2)^2 + (-B - 3C)(2) - A - 2B + 2C$

$$9 = 4A + 4B + 4C - 2B - 6C - A - 2B + 2C$$
$$9 = 3A$$
$$\therefore \mathbf{A = 3}$$

Si $\mathbf{x = -1}$, resulta: $7(-1)^2 - 9(-1) - 1 = (A + B + C)(-1)^2 + (-B - 3C)(-1) - A - 2B + 2C$

$$15 = A + B + C + B + 3C - A - 2B + 2C$$
$$15 = 6C$$
$$\therefore \mathbf{C = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}}$$

Si utilizamos el otro método para determinar los valores de las constantes, tenemos que las tres ecuaciones simultáneas resultantes son: $A + B + C = 7$, $-B - 3C = -9$, $-A - 2B + 2C = -1$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas, resulta: $A = 3$, $B = \frac{3}{2}$ y $C = \frac{5}{2}$.

Sustituimos estos valores en la *ecuación I*, y obtenemos:

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{7x^2 - 9x - 1}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3}{(x-2)} + \frac{3/2}{(x-1)} + \frac{5/2}{(x+1)}$$

Por lo tanto, nuestra integral queda expresada por:

$$\int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = 3\int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)}$$

Resolvemos directamente cada integral, y resulta:

$$\int \frac{(7x - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = 3\ln(x-2) + \frac{3}{2}\ln(x-1) + \frac{5}{2}\ln(x+1) + C$$

Aplicando las leyes de los logaritmos, resulta:

$$\therefore \int \frac{(7x - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \ln(x-2)^3(x-1)^{3/2}(x+1)^{5/2} + C$$

Caso II. ***Los factores del denominador son todos de primer grado (lineales), y algunos se repiten.***

En este caso, el factor $(x-a_1)$ que se repite n veces, corresponde la suma de n fracciones parciales de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a_1)^n}+\frac{B}{(x-a_1)^{n-1}}+\frac{C}{(x-a_1)^{n-2}}+\ldots+\frac{K}{(x-a_1)}$$

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int\frac{(3x^2+5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Solución

Factorizamos el denominador, y tenemos:

$$\left.\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)}\right\}\ \textit{Ecuación I}$$

La *ecuación I* es una *identidad* para toda x (excepto $x = 1, -1$).
Quitando denominadores, obtenemos:

$$3x^2+5x = A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1)$$
$$3x^2+5x = A(x^2+2x+1)+Bx-B+C(x^2-1)$$
$$3x^2+5x = Ax^2+2Ax+A+Bx-B+Cx^2-C$$
$$3x^2+5x = (A+C)\,x^2+(2A+B)\,x+A-B-C$$

Para determinar los valores de las constantes, formulemos las siguientes tres ecuaciones simultáneas: $A + C = 3$, $2A + B = 5$, y $A - B - C = 0$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones simultáneas, y resulta: $A = 2$, $B = 1$ y $C = 1$.

Sustituimos estos valores en la *ecuación I*, para obtener:

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{2}{(x-1)}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)}$$

Por lo tanto, nuestra integral queda expresada por:

$$\int\frac{(3x^2+5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2}=2\int\frac{dx}{(x-1)}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{(x+1)}$$

Resolviendo directamente cada integral, resulta:

$$\int \frac{(3x^2 + 5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = 2\ln(x-1) - \frac{1}{(x+1)} + \ln(x+1) + C$$

Y aplicando las leyes de los logaritmos, obtenemos:

$$\therefore \int \frac{(3x^2 + 5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = \ln(x-1)^2(x+1) - \frac{1}{(x+1)} + C$$

2. Hallar la $\int \frac{(t^3-1)dt}{t^2(t-2)^3}$.

Solución

Factorizamos el denominador, y tenemos:

$$\left.\frac{t^3-1}{t^2(t-2)^3} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{(t-2)^3} + \frac{D}{(t-2)^2} + \frac{E}{(t-2)}\right\} \textit{Ecuación I}$$

La *ecuación I* es una *identidad* para toda t (excepto $t = 0, 2$).
Quitando denominadores, obtenemos:

$$t^3 - 1 = A(t-2)^3 + B(t)(t-2)^3 + C(t^2) + D(t^2)(t-2) + E(t^2)(t-2)^2$$

$$t^3 - 1 = A(t^3 - 6t^2 + 12t - 8) + B(t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 8t) + Ct^2 + D(t^3 - 2t^2) + E(t^4 - 4t^3 + 4t^2)$$

$$t^3 - 1 = At^3 - 6At^2 + 12At - 8A + Bt^4 - 6Bt^3 + 12Bt^2 - 8Bt + Ct^2 + Dt^3 - 2Dt^2 + Et^4 - 4Et^3 + 4Et^2$$

$$t^3 - 1 = (B+E)t^4 + (A - 6B + D - 4E)t^3 + (-6A + 12B + C - 2D + 4E)t^2 + (12A - 8B)t - 8A$$

Para determinar los valores de las constantes, formulemos las siguientes cinco ecuaciones simultáneas: $B + E = 0$, $A - 6B + D - 4E = 1$, $-6A + 12B + C - 2D + 4E = 0$, $12A - 8B = 0$ y $-8A = -1$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones simultáneas, y resulta:

$$A = \frac{1}{8},\quad B = \frac{3}{16},\quad C = \frac{7}{4},\quad D = \frac{5}{4} \quad \text{y} \quad E = -\frac{3}{16}$$

Sustituyendo estos valores en la *ecuación I*, obtenemos que:

$$\frac{t^3-1}{t^2(t-2)^3} = \frac{1/8}{t^2} + \frac{3/16}{t} + \frac{7/4}{(t-2)^3} + \frac{5/4}{(t-2)^2} - \frac{3/16}{(t-2)}$$

Por lo tanto, nuestra integral queda expresada por:

$$\int \frac{\left(t^3-1\right)dt}{t^2(t-2)^3} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dt}{t} + \frac{7}{4}\int \frac{dt}{(t-2)^3} + \frac{5}{4}\int \frac{dt}{(t-2)^2} - \frac{3}{16}\int \frac{dt}{(t-2)}$$

Resolviendo directamente cada integral, resulta:

$$\int \frac{\left(t^3-1\right)dt}{t^2(t-2)^3} = -\frac{1}{8t} + \frac{3}{16}\ln t - \frac{7}{8(t-2)^2} - \frac{5}{4(t-2)} - \frac{3}{16}\ln(t-2) + C$$

$$\int \frac{\left(t^3-1\right)dt}{t^2(t-2)^3} = -\frac{1}{8t} - \frac{7}{8(t-2)^2} - \frac{5}{4(t-2)} + \frac{3}{16}\ln t - \frac{3}{16}\ln(t-2) + C$$

Simplificando las fracciones y aplicando las leyes de los logaritmos, resulta:

$$\therefore \int \frac{\left(t^3-1\right)dt}{t^2(t-2)^3} = \frac{-11t^2+17t-4}{8t(t-2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left(\frac{t}{t-2}\right) + C$$

Caso III. ***Los factores del denominador son lineales y cuadráticos (primero y segundo grados) y ninguno de los factores cuadráticos se repite.***

En este caso, a todo factor cuadrático x^2+px+q, no repetido en el denominador, le corresponde una fracción parcial de la forma: $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

El método para integrar expresiones de esta forma consiste en reducir la integral a una integral inmediata por sustitución algebraica (primero y segundo métodos).

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \frac{dz}{8+z^3}$.

Solución

Factorizamos el denominador, y tenemos:

$$\left.\frac{1}{8+z^3} = \frac{1}{(2+z)\left(4-2z+z^2\right)} = \frac{A}{(2+z)} + \frac{Bz+C}{\left(4-2z+z^2\right)}\right\} \textit{Ecuación I}$$

Quitando denominadores, obtenemos: $1 = A(4-2z+z^2) + (Bz+C)(2+z)$

$$1 = 4A - 2Az + Az^2 + 2Bz + Bz^2 + 2C + Cz$$

$$1 = (A + B)z^2 + (2B - 2A + C)z + 4A + 2C$$

Para determinar los valores de las constantes, formulemos las siguientes tres ecuaciones simultáneas: $A + B = 0$, $2B - 2A + C = 0$ y $4A + 2C = 1$.

Del sistema de ecuaciones simultáneas resulta: $A = \frac{1}{12}, B = -\frac{1}{12}$ y $C = \frac{1}{3}$.

Sustituimos estos valores en la *ecuación I*, y obtenemos:

$$\frac{1}{8+z^3} = \frac{1}{(2+z)(4-2z+z^2)} = \frac{1/12}{(2+z)} + \frac{(-1/12)z + 1/3}{(4-2z+z^2)}$$

Por lo tanto, nuestra integral queda expresada por:

$$\int \frac{dz}{8+z^3} = \frac{1}{12}\underbrace{\int \frac{dz}{(2+z)}}_{①} + \underbrace{\int \frac{[(-1/12)z + 1/3]\,dz}{(4-2z+z^2)}}_{②}$$

Resolvemos directamente la integral ①, y resulta $\frac{1}{12}\int \frac{dz}{(2+z)} = \mathbf{\frac{1}{12} \ln (2 + z) + C}$

Para la integral ②, tenemos:

$$\int \frac{[(-1/12)z + 1/3]\,dz}{(4-2z+z^2)} = -\frac{1}{12}\underbrace{\int \frac{z\,dz}{(4-2z+z^2)}}_{2a} + \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{dz}{(4-2z+z^2)}}_{2b}$$

De la integral ⓐ (2a), tenemos: $v = 4 - 2z + z^2$

$$dv = (-2 + 2z)\,dz$$

$$dv = 2(z-1)\,dz$$

En el numerador de la integral, debemos tener $(z - 1)\,dz$ para completar el diferencial de la variable, es decir:

$$-\frac{1}{12}\int \frac{z\,dz}{(4-2z+z^2)} = -\frac{1}{12}\int \frac{(z-1+1)\,dz}{(4-2z+z^2)} = -\frac{1}{12}\underbrace{\int \frac{(z-1)\,dz}{(4-2z+z^2)}}_{\text{I}} - \frac{1}{12}\underbrace{\int \frac{dz}{(4-2z+z^2)}}_{\text{II}}$$

Para la integral (I), sabemos que $dv = 2(z-1)\,dz$, por lo que, aplicando directamente la fórmula [5], tenemos que:

$$-\frac{1}{12}\int \frac{(z-1)\,dz}{(4-2z+z^2)} = \left(-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\ln(4-2z+z^2) + C = \mathbf{-\frac{1}{24}\ln(4-2z+z^2) + C}$$

Observamos que las integrales (2b) y (II) son iguales, por lo cual:

$$\frac{1}{3}\int\frac{dz}{\left(4-2z+z^2\right)}-\frac{1}{12}\int\frac{dz}{\left(4-2z+z^2\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{\left(4-2z+z^2\right)}$$

En esta última integral identificamos que la expresión $4-2z+z^2$ (que ordenadamente es: z^2-2z+4) es de la forma az^2+bz+c. Completando el cuadrado para z^2-2z+4, tenemos:

$$z^2-2z+4=\underline{z^2-2z+1}+3$$
$$z^2-2z+4=(z-1)^2+3$$

Por lo anterior, resulta que: $\frac{1}{4}\int\frac{dz}{\left(4-2z+z^2\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{(z-1)^2+3}$

Aplicando directamente la fórmula $\boxed{18}$, resulta:

$$\frac{1}{4}\int\frac{dz}{(z-1)^2+3}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}\right]+C=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arc\,tg}\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}}+C$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral para obtener:

$$\int\frac{dz}{8+z^3}=\frac{1}{12}\ln(2+z)-\frac{1}{24}\ln\left(4-2z+z^2\right)+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arc\,tg}\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}+C$$

Aplicando las leyes de los logaritmos, resulta:

$$\therefore\int\frac{dz}{8+z^3}=\frac{1}{24}\ln\frac{(2+z)^2}{\left(4-2z+z^2\right)}+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arc\,tg}\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}+C$$

2. Hallar la $\int\frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2+2x}$.

Solución

Factorizamos el denominador, y tenemos:

$$\left.\frac{4x-2}{x^3-x^2+2x}=\frac{4x-2}{x\left(x^2-x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{\left(x^2-x+2\right)}\right\}\textit{Ecuación I}$$

Quitando denominadores, obtenemos:

$$4x-2=A(x^2-x+2)+(Bx+C)x$$
$$4x-2=Ax^2-Ax+2A+Bx^2+Cx$$
$$4x-2=(A+B)x^2+(C-A)x+2A$$

Para determinar los valores de las constantes, formulemos las siguientes tres ecuaciones simultáneas: $A+B=0$, $C-A=4$ y $2A=2$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones simultáneas, y resulta: $A = 1$, $B = -1$ y $C = 5$.

Sustituyendo estos valores en la *ecuación I*, obtenemos que:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2+2x} = \frac{4x-2}{x\left(x^2-x+2\right)} = \frac{1}{x} + \frac{-x+5}{\left(x^2-x+2\right)}$$

Por lo tanto, nuestra integral queda expresada por:

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{\left(x^3-x^2+2x\right)} = \underbrace{\int \frac{dx}{x}}_{①} + \underbrace{\int \frac{(-x+5)\,dx}{\left(x^2-x+2\right)}}_{②}$$

Resolviendo directamente la integral ①, resulta: $\int \frac{dx}{x} = \mathbf{\ln x + C}$

Para la integral ②, tenemos: $\int \frac{(-x+5)\,dx}{\left(x^2-x+2\right)} = \underbrace{-\int \frac{x\,dx}{\left(x^2-x+2\right)}}_{2a} + \underbrace{5\int \frac{dx}{\left(x^2-x+2\right)}}_{2b}$

En la integral (2a), tenemos: $v = x^2 - x + 2$

$$dv = (2x-1)\,dx$$

$$dv = 2\,(x - 1/2)\,dx$$

En el numerador de la integral, debemos de tener $(x - 1/2)dx$ para completar el diferencial de la variable, es decir:

$$-\int \frac{x\,dx}{\left(x^2-x+2\right)} = -\int \frac{(x-1/2+1/2)\,dx}{\left(x^2-x+2\right)} = \underbrace{-\int \frac{(x-1/2)\,dx}{\left(x^2-x+2\right)}}_{\text{I}} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-x+2\right)}}_{\text{II}}$$

En la integral (I), sabemos que $dv = 2(x - 1/2)dx$, por lo que aplicando directamente la fórmula $\boxed{5}$, tenemos:

$$-\int \frac{(x-1/2)\,dx}{\left(x^2-x+2\right)} = \mathbf{-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+2\right) + C}$$

Observamos que las integrales (2b) y (II) son iguales, resultando:

$$5\int \frac{dx}{\left(x^2-x+2\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-x+2\right)} = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-x+2\right)}$$

En esta última integral observamos que la expresión $x^2 - x + 2$, es de la forma $ax^2 + bx + c$. Completando el cuadrado para $x^2 - x + 2$, tenemos:

$$x^2 - x + 2 = \underline{x^2 - x + 1/4} + 7/4$$

$$x^2 - x + 2 = (x - 1/2)^2 + 7/4$$

Por lo anterior resulta que: $\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x^2-x+2)}=\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x-1/2)^2+7/4}$

Aplicando directamente la fórmula [18], resulta:

$$\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x-1/2)^2+7/4}=\frac{9}{2}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\text{arc tg}\frac{(x-1/2)}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right]+C=\frac{9\sqrt{7}}{49}\text{ arc tg}\frac{(2x-1)}{\sqrt{7}}+C$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, tenemos:

$$\int\frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2+2x}=\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+2\right)+\frac{9\sqrt{7}}{49}\text{arc tg}\frac{(2x-1)}{\sqrt{7}}+C$$

Aplicando las leyes de los logaritmos resulta:

$$\therefore\int\frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2+2x}=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-x+2}}\right)+\frac{9\sqrt{7}}{49}\text{ arc tg}\frac{(2x-1)}{\sqrt{7}}+C$$

Caso IV. ***Los factores del denominador son lineales y cuadráticos (primero y segundo grados) y algunos de los factores cuadráticos se repiten.***

En este caso, a todo factor cuadrático $x^2 + px + q$ que se repite n veces le corresponderá la suma de n fracciones parciales, de la forma:

$$\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\frac{Cx+D}{(x+px+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{Kx+L}{x^2+px+q}$$

El método para integrar expresiones de esta forma consiste en reducir la integral a una integral inmediata por sustitución trigonométrica. También se recomienda el uso de la siguiente *fórmula de reducción directa.*

$$\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{2\,(n-1)\,a^2}=\left[\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}\right]$$

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int\frac{\left(x^3+3x+1\right)dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Solución

Factorizamos el denominador, y tenemos:

$$\frac{x^3+3x+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)}\Bigg\}\ \textit{Ecuación I}$$

Quitando denominadores, obtenemos: $x^3 + 3x + 1 = Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1)$

$$x^3 + 3x + 1 = Ax + B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$$

$$x^3 + 3x + 1 = Cx^3 + Dx^2 + (A + C)x + B + D$$

Para determinar los valores de las constantes, formulemos las siguientes cuatro ecuaciones simultáneas: $C = 1$, $D = 0, A + C = 3$ y $B + D = 1$.

Del sistema de ecuaciones simultáneas, resulta: $A = 2, B = 1, C = 1$ y $D = 0$.

Sustituyendo estos valores en la *ecuación I*, obtenemos que:

$$\frac{x^3+3x+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)}$$

Por lo tanto, nuestra integral queda expresada por:

$$\int\frac{\left(x^3+3x+1\right)dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\underbrace{\int\frac{(2x+1)\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}}_{①}+\underbrace{\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)}}_{②}$$

En la integral ①, tenemos: $\displaystyle\int\frac{(2x+1)\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\underbrace{\int\frac{2x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}}_{(1a)}+\underbrace{\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}}_{(1b)}$

Resolviendo directamente la integral (1a), resulta: $\displaystyle\int\frac{2x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{\left(x^2+1\right)}+C$

En la integral (1b), tenemos que: $u^2 = x^2$, $u = x$, $du = dx$; $a^2 = 1$, $a = 1$

Es decir: $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^2}$ (*Aplicando el método de sustitución trigonométrica*)

Como se tiene $(u^2 + a^2)^n$, el cambio de variable es: $u = a\,\text{tg}\ z$, de donde $u^2 = a^2\ \text{tg}^2 z$ y también $du = a\sec^2 z\,dz$.

Efectuamos la sustitución en la integral, y tenemos:

$$\int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^2} = \int \frac{a \sec^2 z\, dz}{\left(a^2 \operatorname{tg}^2 z + a^2\right)^2} = \int \frac{a \sec^2 z\, dz}{\left[a^2\left(\operatorname{tg}^2 z + 1\right)\right]^2} = \int \frac{a \sec^2 z\, dz}{\left(a^2 \sec^2 z\right)^2}$$

$$= \int \frac{a \sec^2 z\, dz}{a^4 \sec^4 z} = \frac{1}{a^3}\int \frac{dz}{\sec^2 z} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}}\int \mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{z}\, \boldsymbol{dz}$$

En esta integral resultante, aplicamos el método de integración por partes:

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\int \cos z \cos z\, dz$$

Aquí tenemos:

$$u = \cos z \qquad dv = \cos z\, dz$$

$$du = -\operatorname{sen} z\, dz \qquad \int dv = \int \cos z\, dz$$

$$v = \operatorname{sen} z$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\int \cos z \cos z\, dz = \frac{1}{a^3}\left[\cos z \operatorname{sen} z - \int \operatorname{sen} z\left(-\operatorname{sen} z\, dz\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a^3}\cos z \operatorname{sen} z + \frac{1}{a^3}\int \operatorname{sen}^2 z\, dz$$

Si en la expresión $\frac{1}{a^3}\int \operatorname{sen}^2 z\, dz$ sustituimos $\mathbf{sen}^2\boldsymbol{z}$ por $\mathbf{1}-\mathbf{cos}^2\boldsymbol{z}$, por ser una identidad resulta:

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\cos z \operatorname{sen} z + \frac{1}{a^3}\int \left(1-\cos^2 z\right) dz$$

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\cos z \operatorname{sen} z + \frac{1}{a^3}\int dz - \frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz$$

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz + \frac{1}{a^3}\cos z \operatorname{sen} z + \frac{z}{a^3} + C$$

$$\frac{2}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\left(\cos z \operatorname{sen} z + z\right) + C$$

$$\int \cos^2 z\, dz = \frac{\frac{1}{a^3}(\cos z \operatorname{sen} z + z)}{\frac{2}{a^3}} + C = \frac{1}{2}(\cos z \operatorname{sen} z + z) + C \Big\}$$ *Resultado parcial de la integral* (1b)

De $u = a \operatorname{tg} z$ tenemos que: $\operatorname{tg} z = \frac{u}{a} = \frac{\text{Op}}{\text{Ady}}$; asimismo:

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a}$$

Trazamos un triángulo rectángulo y aplicamos el *Teorema de Pitágoras*, y resulta:

Op = u | Hip = ? | z | Ady = a

$$(\text{Hip})^2 = (\text{Op})^2 + (\text{Ady})^2$$
$$\text{Hip} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

$$\therefore \begin{cases} \operatorname{sen} z = \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ \cos z = \dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \end{cases}$$

Sustituyendo el resultado parcial, tenemos que:

$$\frac{1}{2}(\cos z \operatorname{sen} z + z) + C = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}}\right) + \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a}\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{au}{u^2 + a^2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C$$

Sustituimos los valores originales, y resulta:

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + C \Big\}$$ *Resultado final de la integral* (1b)

La integral (1b) también puede resolverse por medio de la *fórmula de reducción directa*, es decir:

$$u^2 = x^2 \qquad a^2 = 1 \qquad n = 2$$
$$u = x \qquad a = 1$$
$$du = dx$$

Tenemos entonces:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2(2-1)(1)}\left[\frac{x}{(x^2+1)^{2-1}} + [2(2)-3]\int \frac{dx}{(x^2+1)^{2-1}}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

En esta última integral, aplicamos directamente la fórmula [18], resultando:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)} = \frac{1}{2} \text{ arc tg } x + C$$

Por lo tanto, se demuestra que se obtiene el mismo resultado para (1b):

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2} \text{arc tg } x + C$$

En la integral (2) aplicamos directamente la fórmula [5], lo que da:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)} = \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + C$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos:

$$\int \frac{(x^3+3x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{(x^2+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2} \text{ arc tg } x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$\therefore \int \frac{(x^3+3x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x-2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \text{ arc tg } x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

2. Hallar la $\int \frac{(y-2)\,dy}{y(y^2-4y+5)^2}$.

Solución

Factorizamos el denominador, y tenemos:

$$\frac{y-2}{y(y^2-4y+5)^2} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{(y^2-4y+5)^2} + \frac{Dy+E}{y^2-4y+5} \Bigg\} \textit{Ecuación I}$$

Quitando denominadores, tenemos:

$y-2 = A(y^2-4y+5)^2+(By+C)\,y+(Dy+E)\,(y)\,(y^2-4y+5)$

$y-2 = A(y^4+16y^2+25-8y^3+10y^2-40y)+By^2+Cy+(Dy+E)\,(y-4y^2+5y)$

$y-2 = Ay^4+16Ay^2+25A-8Ay^3+10Ay^2-40Ay+By^2+Cy+Dy^4-4Dy^3+5Dy^2+$
$+Ey^3-4Ey^2+5Ey$

$y-2 = (A+D)y^4+(-8A-4D+E)y^3+(26A+B+5D-4E)y^2+(-40A+C+5E)y+25A$

Para determinar los valores de las constantes, formulemos las siguientes cinco ecuaciones simultáneas: $A+D=0$, $-8A-4D+E=0$, $26A+B+5D-4E=0$, y $-40A+C+5E=1$ y $25A=2$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones simultáneas, y resulta:

$$A=-\frac{2}{25},\;\; B=\frac{2}{5},\;\; C=-\frac{3}{5},\;\; D=\frac{2}{25}\;\text{ y }\; E=-\frac{8}{25}$$

Sustituyendo estos valores en la *ecuación I*, obtenemos que:

$$\frac{y-2}{y\left(y^2-4y+5\right)^2}=\frac{-2/25}{y}+\frac{(2/5)y-3/5}{\left(y^2-4y+5\right)^2}+\frac{(2/25)y-8/25}{\left(y^2-4y+5\right)}$$

Por lo tanto, nuestra integral queda expresada por:

$$\int\frac{(y-2)dy}{y\left(y^2-4y+5\right)^2}=-\frac{2}{25}\int\frac{dy}{y}+\int\frac{\left[(2/5)y-3/5\right]dy}{\left(y^2-4y+5\right)^2}+\int\frac{\left[(2/25)y-8/25\right]dy}{\left(y^2-4y+5\right)}$$

$$\int\frac{(y-2)dy}{y\left(y^2-4y+5\right)^2}=\underbrace{-\frac{2}{25}\int\frac{dy}{y}}_{①}+\underbrace{\frac{2}{5}\int\frac{y\,dy}{\left(y^2-4y+5\right)^2}}_{②}-\underbrace{\frac{3}{5}\int\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)^2}}_{③}+$$

$$+\underbrace{\frac{2}{25}\int\frac{y\,dy}{\left(y^2-4y+5\right)}}_{④}-\underbrace{\frac{8}{25}\int\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)}}_{⑤}$$

Resolvemos directamente la integral ①, y resulta: $-\dfrac{2}{25}\displaystyle\int\frac{dy}{y}=-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{25}}\ln y+C$

En la integral ②, tenemos: $\dfrac{2}{5}\displaystyle\int\frac{y\,dy}{\left(y^2-4y+5\right)^2}=\frac{2}{5}\int\left(y^2-4y+5\right)^{-2}y\,dy$

Ahora identificamos: $v = y^2 - 4y + 5 \qquad n = -2$

$$dv = (2y-4)dy$$
$$dv = 2(y-2)dy$$

En la integral debemos tener $(y-2)\,dy$ para completar el diferencial de la variable; por consiguiente:

$$\frac{2}{5}\int\left(y^2-4y+5\right)^{-2} y\,dy = \frac{2}{5}\int\left(y^2-4y+5\right)^{-2}(y-2+2)dy$$

$$= \frac{2}{5}\int\left(y^2-4y+5\right)^{-2}(y-2)dy + \frac{4}{5}\int\left(y^2-4y+5\right)^{-2}dy$$

(2a) (2b)

Aplicando directamente la fórmula [4], en la integral (2a), resulta:

$$\frac{2}{5}\int(y-4y+5)(y-2)dy = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\left(y^2-4y+5\right)^{-2+1}}{-2+1}\right]+C = -\frac{1}{5\left(y^2-4y+5\right)}+C$$

Se hace notar que las integrales (2b) y (3) son semejantes, por tanto:

$$\frac{4}{5}\int\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)^2} - \frac{3}{5}\int\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)^2} = \frac{1}{5}\int\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)^2}$$

En la integral resultante, identificamos la expresión $y^2 - 4y + 5$, que es de la forma $ay^2 + by + c$. Completando el cuadrado para $y^2 - 4y + 5$, tenemos:

$$y^2 - 4y + 5 = \underbrace{y^2 - 4y + 4} + 1, \quad \text{es decir:}$$
$$y^2 - 4y + 5 = (y-2)^2 + 1$$

Por lo anterior, resulta que: $\dfrac{1}{5}\displaystyle\int\frac{du}{\left(y^2-4y+5\right)^2} = \frac{1}{5}\int\frac{dy}{\left[(y-2)^2+1\right]^2}$

Aplicamos la *fórmula de reducción directa*, y tenemos:

Si $u^2 = (y-2)^2 \quad a^2 = 1 \quad n = 2$

$$u = (y-2) \qquad a = 1$$
$$du = dy$$

Es decir:

$$\frac{1}{5}\int\frac{dy}{\left[(y-2)^2+1\right]^2}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)\frac{1}{2(2-1)(1)}\left[\frac{(y-2)}{\left[(y-2)^2+1\right]^{2-1}}+\left[2(2)-3\right]\int\frac{dy}{\left[(y-2)^2+1\right]^{2-1}}\right]$$

$$=\frac{(y-2)}{10\left[(y-2)^2+1\right]}+\frac{1}{10}\int\frac{dy}{(y-2)^2+1}$$

En esta última integral, aplicamos directamente la fórmula [18], resultando:

$$\frac{1}{10}\int\frac{dy}{(y-2)^2+1}=\frac{1}{10}\text{arc tg}(y-2)+C$$

Es decir: $\frac{1}{5}\int\frac{dy}{\left[(y-2)^2+1\right]^2}=\frac{(y-2)}{10\left[(y-2)^2+1\right]}+\frac{1}{10}\,\textbf{arc tg}\,(y-2)+C$

En la integral (4), identificamos: $v=y^2-4y+5$

$$dv=(2y-4)dy$$
$$dv=2(y-2)dy$$

En la integral debemos tener $(y-2)\,dy$ para completar el diferencial de la variable, por tanto:

$$\frac{2}{25}\int\frac{y\,dy}{\left(y^2-4y+5\right)}=\frac{2}{25}\int\frac{(y-2+2)dy}{\left(y^2-4y+5\right)}=\frac{2}{25}\int\underbrace{\frac{(y-2)dy}{\left(y^2-4y+5\right)}}_{(4a)}+\frac{4}{25}\int\underbrace{\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)}}_{(4b)}$$

Aplicamos directamente la fórmula [5], en la integral (4a), y resulta:

$$\frac{2}{25}\int\frac{(y-2)}{\left(y^2-4y+5\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{25}\right)\ln\left(y-4y+5\right)+C=\frac{1}{25}\ln\left(y^2-4y+5\right)+C$$

Entonces observamos que las integrales (4b) y (5) son semejantes, por lo cual operamos:

$$\frac{4}{25}\int\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)}-\frac{8}{25}\int\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)}=-\frac{4}{25}\int\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)}$$

En la integral resultante, identificamos la expresión y^2-4y+5, que es de la forma ay^2+by+c. Completando el cuadrado para y^2-4y+5, tenemos:

$$y^2-4y+5=\underbrace{y^2-4y+4}+1, \text{ es decir:}$$
$$y^2-4y+5=(y-2)^2+1$$

De lo anterior resulta que: $-\frac{4}{25}\int\frac{dy}{\left(y^2-4y+5\right)}=-\frac{4}{25}\int\frac{dy}{(y-2)^2+1}$

Por la fórmula [18] tenemos: $-\frac{4}{25}\int\frac{dy}{(y-2)^2+1}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{25}}\textbf{arc tg}\,(\boldsymbol{y}-\mathbf{2})+\boldsymbol{C}$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos:

$$\int\frac{(y-2)dy}{y\left(y^2-4y+5\right)^2}=-\frac{2}{25}\ln y-\frac{1}{5\left(y^2-4y+5\right)}+\frac{(y-2)}{10\left[(y-2)^2+1\right]}+\frac{1}{10}\text{arc tg}\,(y-2)+$$
$$+\frac{1}{25}\ln\left(y^2-4y+5\right)-\frac{4}{25}\text{arc tg}\,(y-2)+C$$

$$\therefore\int\frac{(y-2)\,dy}{y\left(y^2-4y+5\right)^2}=\frac{1}{25}\ln\left(\frac{y^2-4y+5}{y^2}\right)-\frac{3}{50}\text{arc tg}\,(y-2)+\frac{(y-4)}{10\left(y^2-4y+5\right)}+C$$

Ya que hemos analizado el método de integración de funciones racionales, concluimos con el siguiente teorema general: *La integral de toda función racional, cuyo denominador es posible descomponer en factores reales de primero y segundo grados, puede hablarse y puede expresarse en términos de funciones algebraicas, logarítmicas y trigonométricas inversas, es decir, en términos de las funciones elementales.*

EJERCICIO XII

I. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales (caso I).

1. $\int\frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)+C$

2. $\int\frac{\left(6t^2-2t-1\right)dt}{4t^3-t}=\frac{1}{4}\ln\left[\frac{t^4\left(2t+1^3\right)}{(2t-1)}\right]+C$

3. $\int \frac{(2z+3)\,dz}{z^3+z^2-2z} = \ln\left[\frac{(z-1)^{5/3}}{z^{3/2}(z+2)^{1/6}}\right]+C$

4. $\int \frac{(5x^2-3)\,dx}{x^3-x} = \ln x^3(x^2-1)+C$

5. $\int \frac{(y+1)\,dy}{y^3+y^2-6y} = \ln\left[\frac{(y-2)^{3/10}}{y^{1/6}(y+3)^{2/15}}\right]+C$

6. $\int \frac{(4x+3)\,dx}{4x^3+8x^2+3x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{(2x+1)(2x+3)}{x^2}+C$

7. $\int \frac{(5x-2)\,dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left[\frac{x^4(2x+1)^3}{(2x-1)}\right]+C$

8. $\int \frac{(x^4+3x^3-5x^2-4x+17)\,dx}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{x^2}{2}+2x-\frac{3}{(x-1)}-\ln\left[(x+3)^4(x-1)^2\right]+C$

9. $\int \frac{(x^2-3x-1)\,dx}{x^3+x^2-2x} = \ln\left[\frac{\sqrt{x}\,(x+2)^{3/2}}{(x-1)}\right]+C$

10. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5}\ln\left[(x+1)(x-4)^4\right]+C$

11. $\int \frac{(x^2+3x-4)\,dx}{x^2-2x-8} = x+\ln\left[(x+2)(x-4)^4\right]+C$

12. $\int \frac{(4x^3+2x^2+1)\,dx}{4x^3-x} = x+\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(2x+1)(2x-1)^2}{x^2}\right]+C$

II. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales (caso II).

1. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^3} = \ln(x-1)+\frac{3-4x}{2(x-1)^2}+C$

2. $\int \frac{(x^4-8)\,dx}{x^3+2x^2} = \frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{x}+2\ln(x^2+2x)+C$

3. $\int \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3+4x^2+5x+2} = \ln(x+2)+\frac{2}{(x+1)}+C$

4. $\displaystyle\int \frac{t^4\,dt}{(1-t)^3} = -\frac{t^2}{2} - 3t - \ln(1-t)^6 + \frac{8t-7}{2(1-t)^2} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{z\,dz}{(z-2)^2} = \ln(z-2) - \frac{2}{(z-2)} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\theta^3+\theta^2} = \ln\left(\frac{\theta+1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta} + C$

7. $\displaystyle\int \frac{\left(x^4 - x^3 - x - 1\right)dx}{x^3 - x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{\left(5t^2 + 12t + 1\right)dt}{t^3 + 3t^2 - 4} = \ln\left[(t-1)^2(t+2)^3\right] - \frac{1}{(t+2)} + C$

9. $\displaystyle\int \frac{(5x+3)\,dx}{x^2+4x+4} = 5\ln(x+2) + \frac{7}{(x+2)} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{(x+2)^2} = x - 4\ln(x+2) - \frac{5}{(x+2)} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+3x^2} = \frac{1}{9}\ln\left(\frac{x+3}{x}\right) - \frac{1}{3x} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{\left(x^2 - 3x - 7\right)dx}{(x+1)^2(2x+3)} = \frac{3}{(x+1)} - 5\ln(x+1) + \frac{11}{2}\ln(2x+3) + C$

III. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales (caso III).

1. $\displaystyle\int \frac{\left(t^3 + t^2 + t + 2\right)dt}{t^4 + 3t^2 + 2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+2\right) + \text{arc tg}\, t + C$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{16\,x^4} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - \frac{1}{4}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{\left(x^3 + x^2 + x + 3\right)dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)} = \ln\sqrt{x^2+3} + \text{arc tg}\, x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C$

5. $\int \frac{\left(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3\right) dx}{x^3 - 2x^2 + 3x} = \frac{x^2}{2} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}\right) + C$

6. $\int \frac{(4x - 2)\, dx}{x\left(x^2 - x + 2\right)} = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x}\right) + 4 \text{ arc tg } (x - 1) + C$

7. $\int \frac{\left(4z^2 + 6\right) dz}{z^3 + 3z} = \ln z^2\left(z^2 + 3\right) + C$

8. $\int \frac{\left(y^2 + y\right) dy}{(y - 1)\left(y^2 + 1\right)} = \ln(y - 1) + \text{arc tg } y + C$

9. $\int \frac{\left(2x^2 - 8x - 8\right) dx}{(x - 2)\left(x^2 + 4\right)} = 2\ln\left(\frac{x^2 + 4}{x - 2}\right) + C$

10. $\int \frac{(x + 1)\, dx}{x^3 + 4x} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 4}\right) - \frac{1}{2} \text{arc tg } \frac{x}{2} + C$

11. $\int \frac{\left(3x^2 - 6x + 8\right) dx}{x^3 - x^2 - 4} = \ln\left[(x - 2)\left(x^2 + x + 2\right)\right] - \frac{8}{\sqrt{7}} \text{ arc tg } \frac{(2x + 1)}{\sqrt{7}} + C$

12. $\int \frac{dt}{16t^4 - 1} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{2t - 1}{2t + 1}\right) - \frac{1}{4} \text{ arc tg } 2t + C$

IV. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales (caso IV).

1. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = -\frac{1}{x} - \text{arc tg } x + C$

2. $\int \frac{2z\, dz}{\left(z^2 + 1\right)(z + 1)^2} = \frac{1}{(z + 1)} + \text{arc tg } z + C$

3. $\int \frac{\left(4t^2 + 2t + 8\right) dt}{t\left(t^2 + 2\right)^2} = \ln\left(\frac{t^2}{t^2 + 2}\right) + \frac{t}{\left(2t^2 + 4\right)} + \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ arc tg } \frac{t}{\sqrt{2}} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{x^2}{2} - 4\ln\left(x^2+4\right) - \frac{8}{\left(x^2+4\right)} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{\left(y^5+4y^3\right)dy}{\left(y^2+2\right)^3} = \frac{1}{2}\ln\left(y^2+2\right) + \frac{1}{\left(y^2+2\right)^2} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{\left(x^3+2x^2+5x+8\right)dx}{x\left(x^2+4\right)^2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) + \frac{9}{16}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + \frac{x}{8\left(x^2+4\right)} + C$

7. $\displaystyle\int \frac{6x^3\,dx}{\left(x^2+1\right)^2} = 3\ln\left(x^2+1\right) - \frac{3x^2}{\left(x^2+1\right)} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{\left(2t^4-7t^3+28t^2-26t+41\right)dt}{(t+3)\left(t^2-2t+4\right)^2} = 2\ln(t+3) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{(t-1)}{\sqrt{3}} + \frac{2t-11}{6\left(t^2-2t+4\right)} + C$

9. $\displaystyle\int \frac{\left(2x^2-x+2\right)dx}{x^5+2x^3+x} = \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x - \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{18\,dt}{\left(4t^2+9\right)^2} = \frac{1}{6}\,\text{arc tg}\,\frac{2t}{t} + \frac{t}{(4t+9)} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{\left(2z^2+3\right)dz}{\left(z^2+1\right)^2} = \frac{5}{2}\,\text{arc tg}\,z + \frac{z}{2\left(z^2+1\right)} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{\left(x^3+x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \ln\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x - \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + C$

V. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\displaystyle\int \frac{(t-3)\,dt}{t^3+t^2}$

2. $\displaystyle\int \frac{\left(y^3-2\right)dy}{y^3-y^2}$

3. $\displaystyle\int \frac{\left(2-z^2\right)dz}{z^3+3z^2+2z}$

4. $\displaystyle\int \frac{(3-x)\,dx}{x^3+4x^2+3x}$

5. $\int \frac{(3t^2+7)\,dt}{(t+1)(t+2)(t+3)}$

6. $\int \frac{(x^2-3)\,dx}{(x+1)^2(x+2)}$

7. $\int \frac{9y^2\,dy}{(2y+1)(y+2)^2}$

8. $\int \frac{8\,dz}{z^3-4z}$

9. $\int \frac{(3x+7)\,dx}{(x+3)(x+2)(x+1)}$

10. $\int \frac{(3y^2+11y+2)\,dy}{(y+3)(y^2-1)}$

11. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x}$

12. $\int \frac{(t^2-t-5)\,dt}{t^3+5t^2}$

13. $\int \frac{z^2\,dz}{(2z+3)(4z^2-1)}$

14. $\int \frac{(x^4-3x^3)\,dx}{(x^2-1)(x-2)}$

15. $\int \frac{(5y^2-9)\,dy}{y^3-9y}$

16. $\int \frac{(2x^2+1)\,dx}{(x-2)^3}$

17. $\int \frac{(24x^2+10x+5)\,dx}{(2x-1)(2x+1)^2}$

18. $\int \frac{(5y^2+14y+10)\,dy}{(y+1)^2(y+2)}$

19. $\int \frac{(z+2)\,dz}{z^4+2z^3+z^2}$

20. $\int \frac{(2x^4+3x^3-20x-28)\,dx}{(x^2-4)(2x-1)}$

21. $\int \frac{5y\,dy}{(y+2)(y^2+1)}$

22. $\int \frac{(2x^2+x+3)\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$

23. $\int \frac{(5x^3-4x)\,dx}{x^4-16}$

24. $\int \frac{(4y^2+2y)\,dy}{(y^2+1)(y+1)^2}$

25. $\int \frac{(2x^3+18)\,dx}{(x+3)(x^2+9)}$

26. $\int \frac{(t+10)\,dt}{t^3+2t^2+5t}$

27. $\int \frac{(x^4+3)\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$

28. $\int \frac{(3y^3+3y+1)\,dy}{y^4+3y^2}$

29. $\int \frac{(4x^3+3x^2+18x+12)\,dx}{(x^2+4)^2}$

30. $\int \frac{(2x^3+9x)\,dx}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}$

31. $\int \frac{(2y^2+3y+2)\,dy}{y^3+4y^2+6y+4}$

32. $\int \frac{(z+3)\,dz}{4z^4+4z^3+z^2}$

33. $\int \frac{e^{5y}\,dy}{\left(e^{2y}+1\right)^2}$

34. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+3x+2}$

35. $\int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)}$

36. $\int \frac{\left(3x^2+1\right)dx}{x^3+x^2+x}$

37. $\int \frac{\left(t^3+1\right)dt}{t^5+2t^3+t}$

38. $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

39. $\int \frac{\left(y^3+y^2-5y+15\right)dy}{\left(y^2+5\right)\left(y^2+2y+3\right)}$

40. $\int \frac{\left(x^4+8x^3-x^2+2x+1\right)dx}{\left(x^2+x\right)\left(x^3+1\right)}$

41. $\int \frac{\left(x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4\right)dx}{\left(x^2+2\right)^3}$

42. $\int \frac{\left(x^2+6x-1\right)dx}{x^3-7x^2+15x-9}$

43. $\int \frac{dx}{x^2\left(x^2+3\right)}$

44. $\int \frac{(4y-2)\,dy}{y^3-y^2-2y}$

45. $\int \frac{\left(x^2+x+2\right)dx}{x^2-1}$

46. $\int \frac{\left(5x^2-11x+5\right)dx}{x^3-4x^2+5x-2}$

47. $\int \frac{\left(2t^4-2t+1\right)dt}{2t^5-t^4}$

48. $\int \frac{\left(3x^2-x+1\right)dx}{x^3-x^2}$

2.5 SOLUCIÓN DE INTEGRALES INDEFINIDAS POR EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN DE UNA NUEVA VARIABLE (MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR RACIONALIZACIÓN)

Introducción

Las funciones algebraicas *no racionales*, son aquellas que contienen radicales. Sólo algunas cuantas de ellas se pueden integrar en términos de funciones elementales. En algunos casos, sustituyendo una nueva variable, dichas funciones pueden transformarse en funciones equivalentes que o son racionales o se encuentran en la lista de las formas elementales de integración.

El método de integrar una función no racional, reemplazando la variable por una nueva variable de manera que el resultado sea una función racional, se denomina *integración por racionalización*. Este método es considerado como uno de los más importantes del cálculo integral.

Caso I. ***Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de x puede transformarse en forma racional mediante la sustitución $x = z^n$, donde n es el menor denominador común de los exponentes fraccionarios de x.***

En este caso, x, dx y cada radical pueden expresarse racionalmente en términos de la variable z.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \frac{(5x+9)\,dx}{(x-9)\,x^{3/2}}$.

Solución

Como $n = 2$, sea $x = z^2$; entonces $x^{3/2} = z^3$ y $dx = 2z\,dz$.

De lo anterior tenemos: $\int \frac{(5x+9)\,dx}{(x-9)\,x^{3/2}} = \int \frac{\left(5z^2+9\right)2z\,dz}{\left(z^2-9\right)z^3} = \int \frac{\left(10z^3+18z\right)dz}{(z+3)(z-3)z^3}$

Con base en el caso II del método de integración de fracciones racionales, tenemos:

$$\frac{10z^3+18z}{(z+3)(z-3)z^3} = \frac{A}{(z+3)} + \frac{B}{(z-3)} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z} \Bigg\} \textit{Ecuación I}$$

Quitando denominadores obtenemos:

$$10z^3+18z = A\left(z^3\right)(z-3) + B\left(z^3\right)(z+3) + C(z+3)(z-3) + D(z)(z+3)(z-3) + E\left(z^2\right)(z+3)(z-3)$$

$$10z^3+18z = A\left(z^4-3z^3\right) + B\left(z^4+3z^3\right) + C\left(z^2-9\right) + D\left(z^3-9z\right) + E\left(z^4-9z^2\right)$$

$$10z^3+18z = Az^4-3Az^3+Bz^4+3Bz^3+Cz^2-9C+Dz^3-9Dz+Ez^4-9Ez^2$$

$$10z^3+18z = (A+B+E)z^4+(3B-3A+D)z^3+(C-9E)z^2-9Dz-9C$$

Para determinar los valores de las constantes, formulemos las siguientes cinco ecuaciones simultáneas: $A+B+E=0$, $3B-3A+D=10$, $C-9E=0$, $-9D=18$ y $-9C=0$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas, resulta: $A=-2$, $B=2$, $C=0$, $D=-2$ y $E=0$.

Sustituimos estos valores en la *ecuación I*, y obtenemos que:

$$\frac{10z^3+18z}{(z+3)(z-3)z^3} = \frac{-2}{(z+3)} + \frac{2}{(z-3)} + \frac{0}{z^3} + \frac{-2}{z^2} + \frac{0}{z}$$

Por lo tanto, nuestra integral queda expresada por:

$$\int \frac{\left(10z^3+18z\right)dz}{(z+3)(z-3)z^3} = -2\int \frac{dz}{(z+3)} + 2\int \frac{dz}{(z-3)} - 2\int \frac{dz}{z^2}$$

Resolviendo directamente cada integral, resulta:

$$\int \frac{\left(10z^3+18z\right)dz}{(z+3)(z-3)z^3} = -2\ln(z+3) + 2\ln(z-3) + \frac{2}{z} + C = \mathbf{2\ln\left(\frac{z-3}{z+3}\right) + \frac{2}{z} + C}$$

De $x=z^2$, se obtiene que $z=\sqrt{x}$; entonces tenemos:

$$\therefore \int \frac{(5x+9)\,dx}{(x-9)\,x^{3/2}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}\right) + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

2. Hallar la $\int \frac{dx}{x^{5/8} - x^{1/8}}$.

Solución

Como $n = 8$, sea $x = z^8$; entonces $x^{5/8} = z^5$, $x^{1/8} = z$ y $dx = 8z^7\,dz$.

De lo anterior, tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^{5/8} - x^{1/8}} = \int \frac{8z^7\,dz}{z^5 - z} = \int \frac{8z^7\,dz}{z(z^4 - 1)} = 8\int \frac{z^6\,dz}{z^4 - 1}$$

Dividiendo, resulta: $8\int \frac{z^6\,dz}{z^4 - 1} = 8\int \left(z^2 + \frac{z^2}{z^4 - 1}\right)dz = 8\underbrace{\int z^2\,dz}_{(1)} + 8\underbrace{\int \frac{z^2\,dz}{z^4 - 1}}_{(2)}$.

Resolvemos directamente la integral (1) por la fórmula [4], resulta:

$$8\int z^2\,dz = \frac{8z^3}{3} + C$$

En la integral (2) aplicamos el caso III del método de integración de fracciones racionales, con lo que resulta:

$$\left.\frac{8z^2}{z^4 - 1} = \frac{8z}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)} = \frac{Az + B}{(z^2 + 1)} + \frac{Cz + D}{(z^2 - 1)}\right\} \textit{Ecuación I}$$

Quitando denominadores, obtenemos:

$$8z^2 = (Az + B)(z^2 - 1) + (Cz + D)(z^2 + 1)$$
$$8z^2 = Az^3 - Az + Bz^2 - B + Cz^3 + Cz + Dz^2 + D$$
$$8z^2 = (A + C)z^3 + (B + D)z^2 + (C - A)z + D - B$$

Para determinar los valores de las constantes, formulemos las siguientes cuatro ecuaciones simultáneas: $A + C = 0$, $B + D = 8$, $C - A = 0$ y $D - B = 0$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas, resulta: $A = 0$, $B = 4$, $C = 0$ y $D = 4$.

Sustituimos estos valores en la *ecuación I*, y obtenemos que:

$$\frac{8z^2}{z^4 - 1} = \frac{(0)z + 4}{(z^2 + 1)} + \frac{(0)z + 4}{(z^2 - 1)}$$

Por lo tanto, nuestra integral (2), queda expresada por:

$$8\int \frac{z^2\,dz}{z^4 - 1} = 4\underbrace{\int \frac{dz}{z^2 + 1}}_{(2a)} + 4\underbrace{\int \frac{dz}{z^2 - 1}}_{(2b)}$$

En la integral (2a), aplicamos directamente la fórmula [18], de lo que resulta:

$$4\int \frac{dz}{z^2+1} = 4 \operatorname{arc tg} z + C$$

En la integral (2b), aplicamos directamente la fórmula [19], lo que da:

$$4\int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{4}{2}\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + C = 2\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + C$$

Escribimos en forma unificada el resultado de las integrales (1), (2a) y (2b), tenemos:

$$8\int \frac{z^6\,dz}{z-1} = \frac{8z^3}{3} + 4\text{arc} + \text{tg } z + 2\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + C$$

De $x^{1/8} = z$ se obtiene que $z^3 = x^{3/8}$; entonces tenemos:

$$\therefore \int \frac{dx}{x^{5/8} - x^{1/8}} = \frac{8x^{3/8}}{3} + 4 \operatorname{arc tg} x^{1/8} + 2\ln\left(\frac{x^{1/8}-1}{x^{1/8}+1}\right) + C$$

Caso II. ***Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de $a + bx$ puede transformarse en forma racional mediante la sustitución $(a + bx) = z^n$, donde n es el menor denominador común de los exponentes fraccionarios de la expresión $(a + bx)$.***

En este caso, x, dx y cada radical pueden expresarse racionalmente en términos de la variable z.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx$.

Solución

La integral propuesta también puede expresarse por: $\int x(a+x)^{1/3}dx$. Como $n = 3$, sea $(a + x) = z^3$, $x = (z^3 - a)$, $dx = 3z^2\,dz$ y $(a + x)^{1/3} = z$.

Por lo anterior, tenemos:

$$\int x(a+x)^{1/3}dx = \int (z^3 - a)(z)(3z^2\,dz) = \int (3z^6 - 3az^3)dz = 3\underbrace{\int z^6 dz}_{(1)} - 3a\underbrace{\int z^3 dz}_{(2)}$$

Resolviendo directamente las integrales (1) y (2) por la fórmula [4], tenemos:

$$3\int z^6dz - 3a\int z^3dz = \frac{3z^7}{7} - \frac{3az^4}{4} + C = \frac{12z^7 - 21az^4}{28} + C = \frac{\mathbf{3z^4}}{\mathbf{28}}\left(\mathbf{4z^3 - 7a}\right) + \mathbf{C}$$

De $(a+x)^{1/3} = z$ se obtiene que $z^4 = (a+x)^{4/3}$, y como $z^3 = (a+x)$, entonces tenemos:

$$\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx = \frac{3(a+x)^{4/3}}{28}\left[4(a+x) - 7a\right] + C = \frac{3(a+x)^{4/3}}{28}(4a+4x-7a) + C$$

$$\therefore \int \boldsymbol{x\sqrt[3]{a+x}\,dx} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{28}}(\boldsymbol{a+x})^{4/3}(\boldsymbol{4x-3a}) + \boldsymbol{C}$$

2. Hallar la $\int \frac{\sqrt{(1+x+1)}\,dx}{\left(\sqrt{1+x-1}\right)}$.

Solución

La integral propuesta, también puede expresarse por: $\int \frac{\left[(1+x)^{1/2}+1\right]dx}{\left[(1+x)^{1/2}-1\right]}$; como $n = 2$, sea $(1+x) = z^2$, $dx = 2z\,dz$ y $(1+x)^{1/2} = z$.

Por lo anterior, tenemos: $\int \frac{\left[(1+x)^{1/2}+1\right]dx}{\left[(1+x)^{1/2}-1\right]} = \int \frac{(z+1)(2z\,dz)}{(z-1)} = 2\int \frac{\left(z^2+z\right)dz}{(z-1)}$

Dividiendo, resulta:

$$2\int \frac{\left(z^2+z\right)dz}{(z-1)} = 2\int\left[z + 2 + \frac{2}{(z-1)}\right]dz = 2\int z\,dz + 4\int dz + 4\int \frac{dz}{(z-1)}$$

(1) (2) (3)

Resolviendo directamente la integral (1), por la fórmula [4], resulta:

$$2\int z\,dz = \boldsymbol{z^2 + C}$$

Aplicando la fórmula [1], directamente en la integral (2), tenemos:

$$4\int dz = \boldsymbol{4z + C}$$

Resolviendo directamente la integral (3), por la fórmula [5], resulta:

$$4\int \frac{dz}{(z-1)} = \boldsymbol{4\ln(z-1) + C}$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos:

$$2\int \frac{\left(z^2+z\right)dz}{(z-1)} = z^2 + 4z + 4\ln(z-1) + C$$

Dado que $z = (1+x)^{1/2}$ y $z^2 = (1+x)$, entonces resulta:

$$\therefore \int \frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)dx}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)} = (1+x) + 4\sqrt{1+x} + 4\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right) + C$$

EJERCICIO XIII

I. Comprobar las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración por racionalización.

1. $\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t}} = \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}\right) + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} = \text{arc sen}\left(\frac{2x-1}{5}\right) + C$

3. $\int \frac{dt}{\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)} = 2\ln\left(1+\sqrt{t}\right) + C$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x+1}} = \ln\left(\frac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{4x+1}+1}\right) + C$

5. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\,\text{arc tg}\,\sqrt{x} + C$

6. $\int \frac{\sqrt{t}\,dt}{t^{3/4}+1} = \frac{4}{3}t^{3/4} - \frac{4}{3}\ln\left(t^{3/4}+1\right) + C$

7. $\int \frac{dy}{y^{1/2}-y^{1/4}} = 2\,\text{arc tg}\,\sqrt{y+1} + C$

8. $\int \frac{dy}{y^{1/2}-y^{1/4}} = 2\sqrt{y} + 4y^{1/4} + \ln\left(y^{1/4}-1\right)^4 + C$

9. $\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx = -\frac{2}{45}\left(1-x^3\right)^{3/2}\left(2+3x^3\right) + C$

10. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right)+C$

11. $\int \frac{dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/4}} = 2\sqrt{x+1}-4(x+1)^{1/4}+4\ln\left[1+(x+1)^{1/4}\right]+C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \ln\left(2\sqrt{x+1}+2x-1\right)+C$

13. $\int t^5\sqrt{t^2+4}\,dt = \frac{1}{105}\left(t^2+4\right)^{3/2}\left(15t^4-48t^2+128\right)+C$

14. $\int \frac{x^{1/2}dx}{1+x^{1/3}} = \frac{6}{7}x^{7/6}-\frac{6}{5}x^{5/6}+2x^{1/2}-6x^{1/6}\text{ arc tg }\left(x^{1/6}\right)+C$

15. $\int \frac{x\,dx}{3+x^{1/2}} = \frac{2}{3}x^{3/2}-3x+18\sqrt{x}-54\ln\left(3+\sqrt{x}\right)+C$

16. $\int \frac{dt}{\sqrt{2t}-\sqrt{t-4}} = 2\sqrt{2t}+2\sqrt{t+4}+4\sqrt{2}\ln\left[\frac{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{t+4}\right)\left(\sqrt{t}-2\right)}{t-4}\right]+C$

17. $\int \frac{(1+x)^{1/2}dx}{1-x} = -2\sqrt{1+x}+2\sqrt{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+2}{1+x}\right)+C$

18. $\int \frac{du}{1+\sqrt[3]{u+a}} = \frac{3}{2}(u+a)^{2/3}-3(u+a)^{1/3}+3\ln\left(1+\sqrt[3]{u+a}\right)+C$

19. $\int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^3+2x^2-3x} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}\text{ arc tg }\sqrt{\frac{x}{3}}+C$

20. $\int \frac{(x+5)dx}{(x+4)(x+2)^{1/2}} = 2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\text{ arc tg }\sqrt{\frac{x+2}{2}}+C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \frac{dt}{t-t^{4/3}}$ 2. $\int \frac{dx}{x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}$ 3. $\int \frac{x^2dx}{(4x+1)^{5/2}}$

4. $\int \frac{y\,dy}{(2y+3)^{4/3}}$

5. $\int \frac{\left(t^{3/2}-t^{1/3}\right)dt}{6\,t^{1/4}}$

6. $\int \frac{(x+3)\,dx}{(x+5)\,(x+4)^{1/2}}$

7. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$

8. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^{1/2}}$

10. $\int \frac{t\,dt}{(a+bt)^{3/2}}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\left[9+(2x)^{1/3}\right]}$

12. $\int \frac{dx}{(x+1)^{1/4}-(x+1)^{5/4}}$

13. $\int \frac{dt}{(t-2)^{1/2}-(t-2)^{3/4}}$

14. $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x}+5}$

15. $\int \frac{(t+2)\,dt}{t\sqrt{t-3}}$

UNIDAD 3

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

3.1 INTEGRACIÓN DE PRODUCTOS DE POTENCIAS IMPARES DE SENOS Y COSENOS

Para integrar algunas diferenciales trigonométricas fácilmente, es necesario transformarlas en integrales inmediatas por medio de reducciones trigonométricas sencillas.

Caso I. ***Solución de integrales de la forma:***

$\int \operatorname{sen}^m u\, du$, $\int \cos^n u\, du$ o $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du$,

donde el valor de m o n debe ser un número entero positivo impar, sin importar el valor del otro.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \operatorname{sen}^3 ax\, dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u\, du$, en donde $m = 3$ y satisface la condición del caso I.

Factorizamos el integrando, y tenemos: $\int \operatorname{sen}^3 ax\, dx = \int \operatorname{sen}^2 ax \operatorname{sen} ax\, dx$.

Aplicando la identidad $\mathbf{sen^2\, ax = 1 - cos^2 ax}$, resulta:

$$\int \operatorname{sen}^2 ax \operatorname{sen} ax\, dx = \int \left(1 - \cos^2 ax\right) \operatorname{sen} ax\, dx.$$

Multiplicando, tenemos:

$$\int \left(1 - \cos^2 ax\right) \operatorname{sen} ax\, dx = \underbrace{\int \operatorname{sen} ax\, dx}_{①} - \underbrace{\int \cos^2 ax \operatorname{sen} ax\, dx}_{②}$$

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [8], y resulta:

$$\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

La integral ② tiene la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $m = 1$, lo que satisface la condición del caso I. Para su solución identificamos:

$$v = \cos ax \qquad n = 2$$
$$dv = -a \text{ sen } ax\, dx$$

Aplicando la fórmula $\boxed{4}$ en la integral ②, resulta:

$$-\int \cos^2 ax \text{ sen } ax\, dx = -\left(-\frac{1}{a}\right)\left[\frac{(\cos ax)^{2+1}}{2+1}\right] + C = \frac{\cos^3 ax}{3a} + C$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \textbf{sen}^3\, ax\, dx = \frac{\cos^3 ax}{3a} - \frac{\cos ax}{a} + C$$

2. Hallar la $\int \textbf{sen}^3\, 5x \cos 5x\, dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $m = 3$ y satisface la condición del caso I. Para su solución identificamos:

$$v = \text{sen } 5x \qquad n = 1$$
$$dv = 5 \cos 5x\, dx$$

Aplicando directamente la fórmula $\boxed{4}$, resulta:

$$\therefore \int \textbf{sen}^3\, 5x \cos 5x\, dx = \frac{1}{5}\left[\frac{(\text{sen } 5x)^{3+1}}{3+1}\right] + C = \frac{\text{sen}^4\, 5x}{20} + C$$

3. Hallar la $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x}$.

Solución

Factorizamos el numerador del integrando, y tenemos:

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\text{sen}^4 x}$$

Aplicando la identidad $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, resulta:

$$\int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \int \frac{\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x}$$

Entonces multiplicamos:

$$\int \frac{\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x} - \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x}$$

$$\int \frac{\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \underbrace{\int \operatorname{sen}^{-4} x \cos x\, dx}_{①} - \underbrace{\int \operatorname{sen}^{-2} x \cos x\, dx}_{②}$$

La integral ① tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $n = 1$, lo que satisface la condición del caso I. Para su solución identificamos: $v = \operatorname{sen} x$ $\quad m = -4$

$dv = \cos x\, dx$

Aplicando directamente la fórmula [4], resulta:

$$\int \operatorname{sen}^{-4} x \cos x\, dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$$

La integral ② que tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $n = 1$, y satisface la condición del caso I. Para su solución identificamos: $v = \operatorname{sen} x$ $\quad m = -2$

$dv = \cos x\, dx$

Aplicando directamente la fórmula [4], resulta:

$$-\int \operatorname{sen}^{-2} x \cos x\, dx = -\frac{(\operatorname{sen} x)^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \frac{\cos^3 x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$$

Si utilizamos la identidad $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, el resultado final también puede expresarse así:

$$\therefore \int \frac{\cos^3 x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \csc x - \frac{\csc x}{3} + C$$

4. Hallar la $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\, dx$.

Solución

Observamos que esta integral tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $m = 3$, lo que satisface la condición del caso I. Para su solución factorizamos la función $\operatorname{sen}^3 x$ del integrando, resultando:

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx$$

Aplicamos la identidad $\mathbf{sen^2 x = 1 - cos^2 x}$, y resulta:

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx = \int \cos^4 x \left(1 - \cos^2 x\right) \operatorname{sen} x\, dx$$

Multiplicando, tenemos:

$$\int \cos^4 x \left(1 - \cos^2 x\right) \operatorname{sen} x\, dx = \underbrace{\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx}_{①} - \underbrace{\int \cos^6 x \operatorname{sen} x\, dx}_{②}$$

Resolviendo directamente las integrales ① y ② por medio de la fórmula $\boxed{4}$, resulta:

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C \quad \text{y} \quad -\int \cos^6 x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

5. Hallar la $\int \cos^5 z\, dz$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \cos^n u\, du$, en donde $n = 5$, lo que cumple la condición del caso I. Factorizamos el integrando, y tenemos:

$$\int \cos^5 z\, dz = \int \left(\cos^2 z\right)^2 \cos z\, dz$$

Aplicando la identidad $\mathbf{cos^2 z = 1 - sen^2 z}$, resulta:

$$\int \left(\cos^2 z\right)^2 \cos z\, dz = \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 z\right)^2 \cos z\, dz$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado, y obtenemos:

$$\int \left(1 - \operatorname{sen}^2 z\right)^2 \cos z\, dz = \int \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 z + \operatorname{sen}^4 z\right) \cos z\, dz$$

Y entonces multiplicamos:

$$\int \left(1-2\,\text{sen}^2 z+\text{sen}^4 z\right)\cos z\,dz=\underset{①}{\int \cos z\,dz}-2\underset{②}{\int \text{sen}^2 z\cos dz}+\underset{③}{\int \text{sen}^4 z\cos z\,dz}$$

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [9], y tenemos:

$$\int \cos z\,dz=\textbf{sen}\,\boldsymbol{z}+\boldsymbol{C}$$

Las integrales ② y ③ tienen la forma $\int \text{sen}^m u\cos^n u\,du$, en donde n = 1 y ambas integrales satisfacen la condición del caso I.

Resolvemos directamente las integrales ② y ③ por medio de la fórmula [4], y resulta:

$$\int \text{sen}^2 z\cos z\,dz=-\frac{\mathbf{2\,sen^3}\boldsymbol{z}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{C}\quad \text{y}\quad \int \text{sen}^4 z\cos z\,dz=\frac{\mathbf{sen^5}\boldsymbol{z}}{\mathbf{5}}+\boldsymbol{C}$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \mathbf{cos^5}\boldsymbol{z}\,\boldsymbol{dz}=\textbf{sen}\,\boldsymbol{z}-\frac{\mathbf{2\,sen^3}\boldsymbol{z}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{sen^5}\boldsymbol{z}}{\mathbf{5}}+\boldsymbol{C}$$

6. Hallar la $\int \frac{\text{sen}^5\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\,d\theta$.

Solución

Factorizamos el numerador del integrando:

$$\int \frac{\text{sen}^5\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\,d\theta=\int \frac{\left(\text{sen}^2\theta\right)^2\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

Aplicando la identidad **sen² θ = 1 – cos²** θ, resulta:

$$\int \frac{\left(\text{sen}^2\theta\right)^2\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}=\int \frac{\left(1-2\cos^2\theta\right)^2\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado, y tenemos:

$$\int \frac{\left(1-\cos^2\theta\right)^2\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}=\int \frac{\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

Entonces multiplicamos:

$$\int\frac{\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}=\int\frac{\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}-2\int\frac{\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}+\int\frac{\cos^4\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

$$=\underset{①}{\int(\cos\theta)^{-1/2}\,\text{sen}\,\theta\,d\theta}-2\underset{②}{\int\cos^{3/2}\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta}+\underset{③}{\int\cos^{7/2}\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta}$$

Las integrales ①, ② y ③ tienen la forma $\int \text{sen}^m u\cos^n u\,du$, en donde $m = 1$. Todas las integrales satisfacen la condición del caso I.

Resolviendo directamente las integrales ①, ② y ③ por medio de la fórmula [4], resulta:

$$\int(\cos\theta)^{-1/2}\,\text{sen}\,\theta\,d\theta=-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{cos}\,\theta}+C$$

$$-2\int\cos^{3/2}\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta=-\frac{\mathbf{4\,cos^{5/2}}\,\theta}{\mathbf{5}}+C\quad\text{y}\quad\int\cos^{7/2}\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta=-\frac{\mathbf{2\,cos}\,\theta}{\mathbf{9}}+C$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore\ \int\frac{\mathbf{sen^5}\theta\,d\theta}{\sqrt{\mathbf{cos}\,\theta}}=-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{cos}\,\theta}-\frac{\mathbf{4\,cos^{5/2}}\,\theta}{\mathbf{5}}-\frac{\mathbf{2\,cos^{9/2}}\,\theta}{\mathbf{9}}+C$$

7. Hallar la $\int=\dfrac{\text{ctg}\,y\,dy}{\sqrt{\text{sen}\,y}}$.

Solución

Aplicando la identidad $\mathbf{ctg}\,y=\dfrac{\mathbf{cos}\,y}{\mathbf{sen}\,y}$, y resulta:

$$\int\frac{\text{ctg}\,y\,dy}{\sqrt{\text{sen}\,y}}=\int\frac{\frac{\cos y}{\text{sen}\,y}\,dy}{\sqrt{\text{sen}\,y}}=\int\frac{\cos y\,dy}{\text{sen}^{3/2}y}\int\text{sen}^{-3/2}y\cos y\,dy$$

La integral resultante tiene la forma $\int\text{sen}^m u\cos^n u\,du$, en donde $n = 1$, lo que satisface la condición del caso I.

Resolvemos directamente la integral por medio de la fórmula [4], y resulta:

$$\int\text{sen}^{-3/2}y\cos y\,dy=-\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{sen}\,y}}+C$$

$$\therefore\ \int\frac{\mathbf{ctg}\,y\,dy}{\sqrt{\mathbf{sen}\,y}}=-\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{sen}\,y}}+C$$

EJERCICIO XIV

I. Comprobar las siguientes integrales de productos de potencias impares de senos y cosenos (caso I).

1. $\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

2. $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \dfrac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C$

3. $\int \operatorname{sen}^2 z \cos z\,dz = \dfrac{\operatorname{sen}^3 z}{3} + C$

4. $\int \cos^5 nt\,dt = \dfrac{\operatorname{sen} nt}{n} - \dfrac{\operatorname{sen}^5 nt}{3n} + C$

5. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = -\dfrac{\cos^3 x}{3} + C$

6. $\int \operatorname{sen}^3 mx\,dx = -\dfrac{\cos^3 mx}{3m} - \dfrac{\cos mx}{m} + C$

7. $\int \cos^3 2y \operatorname{sen} 2y\,dy = -\dfrac{\cos^4 2y}{8} + C$

8. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\,dx = -\dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \dfrac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$

9. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \sec x + \cos x + C$

10. $\int \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta\,d\theta = -\dfrac{\cos^2 2\theta}{4} + C$

11. $\int \operatorname{sen}^5 \theta\,d\theta = -\cos\theta + \dfrac{2\cos^3\theta}{3} - \dfrac{\cos^3\theta}{3} + C$

12. $\int \dfrac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}\,dx = \dfrac{3\operatorname{sen}^{2/3} x}{2} - \dfrac{3\operatorname{sen}^{8/3} x}{4} + \dfrac{3\operatorname{sen}^{14/3} x}{14} + C$

13. $\int \cos^3 \dfrac{x}{2}\,dx = 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} - \dfrac{2\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2}}{3} + C$

14. $\int \cos^3 \dfrac{x}{a} \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{a}\,dx = \dfrac{a \operatorname{sen}^3 \frac{x}{a}}{3} - \dfrac{a \operatorname{sen}^5 \frac{x}{a}}{5} + C$

15. $\int \operatorname{sen}^3 mx \cos^2 mx\, dx = -\dfrac{\cos^3 mx}{3m} + \dfrac{\cos^5 mx}{5m} + C$

16. $\int \operatorname{sen}^5 (a+bx)\, dx = -\dfrac{\cos(a+bx)}{b} + \dfrac{2\cos^3(a+bx)}{3b} - \dfrac{\cos^5(a+bx)}{5b} + C$

17. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3 2y\, dy}{\sqrt[3]{\cos dy}} = -\dfrac{3\cos^{2/3} 2y}{4} + \dfrac{3\cos^{8/3} 2y}{16} + C$

18. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^5 2x\, dx}{\sqrt{\cos 2x}} = -\sqrt{\cos 2x} + \dfrac{2\cos^{5/2} 2x}{5} - \dfrac{\cos^{9/2} 2x}{9} + C$

19. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\, dx = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \dfrac{2\operatorname{sen}^5 x}{5} + \dfrac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$

20. $\int \operatorname{sen}^3 3t \cos^5 3t\, dt = \dfrac{\operatorname{sen}^4 3x}{12} - \dfrac{\operatorname{sen}^6 3x}{9} + \dfrac{\operatorname{sen}^8 3x}{24} + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \dfrac{\operatorname{tg} x\, dx}{\sqrt{\cos x}}$

2. $\int \dfrac{\cos^3 3x\, dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}}$

3. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^5 x\, dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$

4. $\int \dfrac{\cos^5 2x\, dx}{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$

5. $\int \operatorname{sen}^7 3x\, dx$

6. $\int \cos^7 2x\, dx$

7. $\int \cos^7 mx\, dx$

8. $\int \operatorname{sen}^5 \theta \cos\theta\, d\theta$

9. $\int \sqrt{\cos x}\, \operatorname{sen}^3 x\, dx$

10. $\int \sqrt{\operatorname{sen} 2x} \cos^3 2x\, dx$

11. $\int \operatorname{sen}^2 t \cos^5 t\, dt$

12. $\int \operatorname{sen}^3 \dfrac{x}{2}\, dx$

13. $\int \cos^3 2\theta\, \operatorname{sen}^5 2\theta\, d\theta$

14. $\int \operatorname{sen} nt \cos nt\, dt$

15. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{\cos^4 x\, dx}$

16. $\int \dfrac{\cos^3 2x\, dx}{\operatorname{sen}^2 2x}$

17. $\int \sqrt[3]{\cos 2y}\, \operatorname{sen}^3 2y\, dy$

18. $\int \sqrt[3]{\operatorname{sen} x} \cos^3 x\, dx$

19. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^5 x\, dx$

20. $\int \operatorname{sen}^7 \dfrac{x}{3}\, dx$

21. $\int \operatorname{sen}^7 x \cos^3 x\, dx$

3.2 INTEGRACIÓN DE PRODUCTOS DE POTENCIAS PARES DE SENOS Y COSENOS (POR MEDIO DE ÁNGULOS MÚLTIPLOS)

Caso II. ***Solución de integrales de la forma:***

$$\int \operatorname{sen}^m u\, du, \quad \int \cos^n u\, du \quad \text{o} \quad \int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du,$$

donde los valores de m y n deben ser, ambos, números pares, enteros y positivos.

Hay que tener presente que cuando m o n son números impares, enteros y positivos, el mejor método de solución es el del caso I.

En el caso II, la expresión diferencial trigonométrica dada puede transformarse, por sustituciones trigonométricas, en una integral inmediata que contiene los senos y cosenos de ángulos múltiplos.

Fórmulas trigonométricas por aplicar

1	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.	3	$\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} = \operatorname{sen} x \cos x$.
2	$\operatorname{sen}^2 x = 1/2 - 1/2 \cos 2x$.	4	$\cos^2 x = 1/2 + 1/2 \cos 2x$.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx$.

Solución

Esta integral tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u\, du$, en donde $m = 2$, lo que satisface la condición del caso II.

Aplicamos la fórmula de identidad 2: $\operatorname{sen}^2 ax = 1/2 - 1/2 \cos 2ax$, y resulta:

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \int (1/2 - 1/2 \cos 2ax)\, dx$$

Multiplicando, tenemos:

$$\int(1/2 - 1/2\cos 2\,ax)\,dx = 1/2\underset{①}{\int dx} - 1/2\underset{②}{\int \cos 2ax\,dx}$$

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [1], y resulta:

$$1/2\int dx = \frac{x}{2} + C$$

Aplicamos la fórmula ⑨ en la integral [2], y resulta:

$$-1/2\int \cos 2ax\,dx = -\frac{\text{sen } 2ax}{4a} + C$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \text{sen}^2\, ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen } 2\,ax}{4a} + C$$

2. Hallar la $\int \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \cos^n u\,du$, en donde $n = 4$, lo que satisface la condición del caso II.

Factorizamos el integrando así: $\int\left(\cos^4\frac{x}{2}\right)dx = \int\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^2 dx$

Aplicando la fórmula **4**: $\cos^2\frac{x}{2} = 1/2 + 1/2\cos x$, resulta:

$$\int\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int(1/2 + 1/2\cos x)^2\,dx$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado, y tenemos:

$$\int(1/2 + 1/2\cos x)^2\,dx = \int\left(1/4 + 1/2\cos x + 1/4\cos^2 x\right)dx$$

Al multiplicar obtenemos:

$$\int\left(1/4 + 1/2\cos x + 1/4\cos^2 x\right)dx = 1/4\underset{①}{\int dx} + 1/2\underset{②}{\int \cos x\,dx} + 1/4\underset{③}{\int \cos^2 x\,dx}$$

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [1], y resulta:

$$1/4\int dx = \frac{x}{4} + C$$

Aplicando la fórmula [9] en la integral (2), resulta:

$$1/2\int \cos x\, dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2} + C$$

En la integral 3 aplicamos la fórmula **4**: $\cos^2 x = 1/2 + 1/2\cos 2x$, y resulta:

$$1/4\int \cos^2 x\, dx = 1/4\int (1/2 + 1/2\cos 2x)\, dx$$

Multiplicando tenemos:

$$1/4\int (1/2 + 1/2\cos 2x)\, dx = 1/8\underbrace{\int dx}_{3a} + 1/8\underbrace{\int \cos 2x\, dx}_{3b}$$

Resolviendo directamente la integral (3a), por medio de la fórmula [1], resulta:

$$1/8\int dx = \frac{x}{2} + C$$

También aplicamos la fórmula [9] en la integral (3b), y resulta:

$$1/8\int \cos 2x\, dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + C$$

Finalmente escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \cos^4 \frac{x}{2}\, dx = \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + C = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + C$$

3. Hallar la $\int \operatorname{sen}^6 z\, dz$.

Solución

Observamos que esta integral tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u\, du$, donde $m = 6$, lo que satisface la condición del caso II.

Factorizamos el integrando, y tenemos: $\int \operatorname{sen}^6 z\, dz = \int (\operatorname{sen}^2 z)^3 dz$

Aplicamos la fórmula **2**: $\operatorname{sen}^2 z = 1/2 - 1/2\cos 2z$, y resulta:

$$\int (\operatorname{sen}^2 z)^3 dz = \int (1/2 - 1/2\cos z)^3 dz$$

Desarrollando el binomio al cubo, tenemos:

$$\int (1/2 - 1/2 \cos 2z)^3 dz = \int \left(1/8 - 3/8 \cos 2z + 3/8 \cos^2 2z - 1/8 \cos^3 2z\right) dz$$

Y al multiplicar resulta:

$$\int \left(1/8 - 3/8 \cos 2z + 3/8 \cos^2 2z - 1/8 \cos^3 2z\right) dz = 1/8 \underset{①}{\int dz}$$

$$-3/8 \underset{②}{\int \cos 2z\, dz} + 3/8 \underset{③}{\int \cos^2 2z\, dz} - 1/8 \underset{④}{\int \cos^3 2z\, dz}$$

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [1], y resulta:

$$1/8 \int dz = \frac{z}{8} + C$$

Aplicando la fórmula [9] en la integral ② resulta:

$$-3/8 \int \cos 2z\, dz = -\frac{3 \text{ sen } 2z}{16} + C$$

En la integral ③ aplicamos la fórmula **4: $\cos^2 2z = 1/2 + 1/2 \cos 4z$**, y resulta:

$$3/8 \int \cos^2 2z\, dz = 3/8 \int (1/2 + 1/2 \cos 4z)\, dz$$

Multiplicando, tenemos:

$$\int (1/2 + 1/2 \cos 4z)\, dz = 3/16 \underset{(3a)}{\int dz} + 3/16 \underset{(3b)}{\int \cos 4z\, dz}$$

Resolvemos directamente la integral (3a) por medio de la fórmula [1], y resulta:

$$3/16 \int dz = \frac{3z}{16} + C$$

Al aplicar la fórmula [9] en la integral (3b), resulta:

$$3/16 \int \cos 4z\, dz = \frac{3 \text{ sen } 4z}{64} + C$$

Observamos que la integral ④ tiene la forma $\int \cos^n u\, du$, en donde $n = 3$, cosa que satisface la condición del caso I.

Factorizamos el integrando, y tenemos: $-1/8 \int \cos^3 2z\, dz = -1/8 \cos^2 2z \cos 2z\, dz$

Aplicando la identidad $\mathbf{cos^2 2z = 1 - sen^2 2z}$, resulta:

$$-1/8\int \cos^2 2z \cos 2z\, dz = -1/8\int \left(1-\text{sen}^2 2z\right)\cos 2z\, dz$$

Entonces multiplicamos:

$$-1/8\int \left(1-\text{sen}^2 2z\right)\cos 2z\, dz = -1/8\underbrace{\int \cos 2z\, dz}_{(4a)} + 1/8\underbrace{\int \text{sen}^2 2z \cos 2z\, dz}_{(4b)}$$

Resolvemos directamente la integral (4a), por medio de la fórmula [9], y resulta:

$$-1/8\int \cos 2z\, dz = -\frac{\mathbf{sen\,2z}}{\mathbf{16}} + C$$

Aplicamos la fórmula [4] en la integral (4b), y resulta:

$$1/8\int \text{sen}^2 2z \cos 2z\, dz = \frac{\mathbf{sen^3 2z}}{\mathbf{48}} + C$$

Finalmente, escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\int \text{sen}^6 z\, dz = \frac{z}{8} - \frac{3\,\text{sen}\,2z}{16} + \frac{3z}{16} + \frac{3\,\text{sen}\,4z}{64} - \frac{\text{sen}\,2z}{16} + \frac{\text{sen}^3 2z}{48} + C$$

$$\therefore \int \mathbf{sen^6}\, \boldsymbol{z\,dz} = \frac{\mathbf{5z}}{\mathbf{16}} - \frac{\mathbf{sen\,2z}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{3\,sen\,4z}}{\mathbf{64}} + \frac{\mathbf{sen^3 2z}}{\mathbf{48}} + C$$

4. Hallar la $\int \text{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $m = n = 2$, lo que satisface la condición del caso II.

Aplicamos las fórmulas **2** y **4**, de modo que:

$\mathbf{sen^2 ax = 1/2 - 1/2\cos 2ax}$ y $\mathbf{cos^2 ax = 1/2 + 1/2\cos 2ax}$, y resulta

$$\int \text{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx = \int (1/2 - 1/2\cos 2ax)(1/2 + 1/2\cos 2ax)\, dx$$

Multiplicamos y simplificamos:

$$\int (1/2 - 1/2\cos 2ax)(1/2 + 1/2\cos 2ax)\, dx = 1/4\underbrace{\int dx}_{(1)} - 1/4\underbrace{\int \cos^2 2ax\, dx}_{(2)}$$

Resolvemos directamente la integral (1) por medio de la fórmula [1], resulta:

$$1/4\int dx = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{4}} + C$$

En la integral ② aplicamos la fórmula **4**: $\cos^2 2\,ax = 1/2 + 1/2 \cos\, 4ax$, lo que da:

$$-1/4 \int \cos^2 2ax = -1/4 \int \left(1/2 + 1/2 \cos 4ax\right) dx$$

Multiplicando tenemos:

$$-1/4 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4ax\right) dx = -1/8 \int dx - 1/8 \int \cos 4ax\, dx$$

ⓐ ⓑ (2a) (2b)

Resolvemos directamente la integral (2a) por medio de la fórmula [1], y resulta:

$$-1/8 \int dx = -\frac{x}{8} + C$$

Aplicando la fórmula [9] en la integral (2b), tenemos:

$$-1/8 \int \cos 4ax\, dx = -\frac{\text{sen } 4ax}{32a} + C$$

Finalmente escribimos en forma unificada los resultados de cada integral:

$$\therefore \int \text{sen}^2\, ax \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{\text{sen } 4ax}{32a} + C = \frac{x}{8} - \frac{\text{sen } 4ax}{32a} + C$$

Nota: Esta integral, $\int \text{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx$, también puede resolverse por medio de la fórmula $\text{sen}^2 ax \cos^2 ax = \dfrac{\text{sen}^2 2ax}{4}$, es decir:

$$\int \text{sen}^2\, ax \cos^2\, ax\, dx = \int \frac{\text{sen}^2 2ax\, dx}{4}$$

Aplicando la fórmula: $\text{sen}^2\, 2\,ax = 1/2 - 1/2\, \cos\, 4ax$, resulta:

$$\int \frac{\text{sen}^2\, 2ax}{4} = \int \frac{1}{4}\left(1/2 - 1/2 \cos 4ax\right) dx$$

Multiplicando, tenemos:

$$1/4 \int \left(1/2 - 1/2 \cos 4ax\right) dx = 1/8 \int dx - 1/8 \int \cos 4ax\, dx$$

① ②

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [1], resulta:

$$1/8 \int dx = \frac{x}{8} + C$$

Aplicando la fórmula [9] en la integral ②, resulta:

$$-1/8\int \cos 4ax\,dx = -\frac{\textbf{sen } 4ax}{32a} + C$$

Para concluir escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \textbf{sen}^2\, ax \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\textbf{sen } 4ax}{32a} + C$$

5. Hallar la $\int \text{sen}^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta$.

Solución

Observamos que la integral dada tiene la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$, donde $m = 4$ y $n = 2$; esto satisface la condición del caso II.

Factorizamos la función $\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}$ del integrando, y tenemos:

$$\int \text{sen}^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta = \int \left(\text{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

Aplicamos las fórmulas $\textbf{sen}^2 \frac{\theta}{2} = 1/2 - 1/2\cos\theta$ y $\cos^2 \frac{\theta}{2} = 1/2 + 1/2 \cos\theta$, y resulta:

$$\int \left(\text{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta = \int (1/2 - 1/2\cos\theta)^2 (1/2 + 1/2\cos\theta)\, d\theta$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado, y tenemos:

$$\int (1/2 - 1/2\cos\theta)^2(1/2 + 1/2\cos\theta)\,d\theta = \int \left(1/4 - 1/2\cos\theta + 1/4\cos^2\theta\right)(1/2 + 1/2\cos\theta)\, d\theta$$

Multiplicamos y simplificamos, y tenemos:

$$\int \left(1/4 - 1/2\ \cos\theta + 1/4\ \cos^2\theta\right)(1/2 + 1/2\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= 1/8 \int d\theta - 1/8 \int \cos\theta\, d\theta - 1/8 \int \cos^2\theta\, d\theta + 1/8 \int \cos^3\theta\, d\theta$$

① ② ③ ④

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [1], resulta:

$$1/8 \int d\theta = \frac{\theta}{8} + C$$

En el caso de la integral ④ observamos que tiene la forma $\int \cos^n u\, du$, donde $n = 3$, por lo que se satisface la condición del caso I.

Factorizamos el integrando y tenemos: $1/8\int \cos^3\theta\, d\theta = 1/8\int \cos^2\theta\cos\theta\, d\theta$

Aplicando la identidad $\mathbf{\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta}$, resulta:

$$1/8\int \cos^2\theta\cos\theta\, d\theta = 1/8\int\left(1-\text{sen}^2\,\theta\right)\cos\theta\, d\theta$$

Entonces multiplicamos:

$$1/8\int\left(1-\text{sen}^2\theta\right)\cos\theta\, d\theta = 1/8\underset{4a}{\int \cos\theta\, d\theta} - 18\underset{4b}{\int \text{sen}^2\,\theta\cos\theta\, d\theta}$$

Observamos que las integrales (2) y [4a] son opuestos, por lo que se anulan. En la integral (3) aplicamos la fórmula $\mathbf{\cos^2\theta = 1/2 + 1/2\cos 2\theta}$, resultando:

$$-1/8\int \cos^2\theta\, d\theta = -1/8\int(1/2+1/2\ \cos 2\theta)\, d\theta$$

Multiplicamos, y así tenemos:

$$-1/8\int(1/2+1/2\cos 2\theta)\, d\theta = -1/16\underset{3a}{\int d\theta} - 1/16\underset{3b}{\int \cos 2\theta\, d\theta}$$

Resolviendo directamente la integral (3a) por medio de la fórmula [1], resulta:

$$-1/16\int d\theta = -\frac{\theta}{\mathbf{16}} + C$$

Aplicamos la fórmula [9] en la integral (3b), y resulta:

$$-1/16\int \cos 2\theta\, d\theta = -\frac{\mathbf{sen\ 2\theta}}{\mathbf{32}} + C$$

En la integral (4b), aplicamos la fórmula [4], y tenemos:

$$-1/8\int \text{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta = -\frac{\mathbf{sen^3\theta}}{\mathbf{24}} + C$$

Finalmente escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \mathbf{sen^4\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = \frac{\theta}{8} - \frac{\theta}{16} - \frac{\mathbf{sen\ 2\theta}}{\mathbf{32}} - \frac{\mathbf{sen^3\theta}}{\mathbf{24}} + C = \frac{\theta}{16} - \frac{\mathbf{sen\ 2\theta}}{\mathbf{32}} - \frac{\mathbf{sen^3\theta}}{\mathbf{24}} + C$$

6. Hallar la $\int (1+\cos t)^3\, dt$.

Solución

Desarrollando el binomio al cubo, tenemos:

$$\int (1+\cos\ t)^3\, dt = \int \left(1+3\cos\ t+3\cos^2 t+\cos^3 t\right)dt$$

Entonces multiplicamos:

$$\int \left(1+3\cos\ t+3\cos^2 t+\cos^3 t\right)dt = \underset{①}{\int dt} + 3\underset{②}{\int \cos\ t\, dt} + 3\underset{③}{\int \cos^2 t\, dt} + \underset{④}{\int \cos^3 t\, dt}$$

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [1], y resulta:

$$\int dt = t + C$$

Aplicando la fórmula [9] en la integral ②, resulta $3\int \cos\ t\,dt = \mathbf{3\ sen}\ t + C$

En la integral ③ observamos que tiene la forma $\int \cos^n u\, du$, donde $n = 2$, lo que satisface la condición del caso II.

Aplicando la fórmula 4: $\cos^2 t = 1/2 + 1/2\cos 2t$, resulta:

$$3\int \cos^2 t\, dt = 3\int (1/2 + 1/2\cos 2t)\, dt$$

Multiplicamos, y tenemos: $3\int (1/2 + 1/2\cos 2t)dt = 3/2\underset{3a}{\int dt} + 3/2\underset{3b}{\int \cos 2t\, dt}$

Resolviendo directamente la integral ③a por medio de la fórmula [1], resulta:

$$3/2\int dt = \frac{3t}{2} + C$$

Aplicamos la fórmula [9] en la integral ③b, y resulta:

$$3/2\int \cos 2t\, dt = \frac{3\ \text{sen}\ 2t}{4} + C$$

La integral ④ tiene la forma $\int \cos^n u\, du$, donde $n = 3$, lo que cumple la condición del caso I.

Factorizamos el integrando, y tenemos: $\int \cos^3 t\, dt = \cos^2 t\ \cos t\, dt$

Aplicando la identidad $\cos^2 t = 1 - \text{sen}^2 t$, resulta:

$$\int \cos^2 t\ \cos t\, dt = \int \left(1 - \text{sen}^2\ t\right)\cos t\, dt$$

Al multiplicar, tenemos:

$$\int \left(1 - \text{sen}^2 t\right)\cos t\, dt = \underset{4a}{\int \cos t\, dt} - \underset{4b}{\int \text{sen}^2 t\ \cos t\, dt}$$

Resolviendo directamente la integral (4a), por medio de la fórmula [9], resulta:

$$\int \cos t\, dt = \textbf{sen}\, t + C$$

Aplicamos la fórmula [4] en la integral (4b), resulta:

$$-\int \text{sen}^2 t \cos t\, dt = -\frac{\textbf{sen}^3 t}{3} + C$$

Para concluir escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\int (1+\cos t)^3 dt = t + 3\,\text{sen}\, t + \frac{3t}{2} + \frac{3\,\text{sen}\, 2t}{4} + \text{sen}\, t - \frac{\text{sen}^3 t}{3} + C$$

$$\therefore \int (1+\cos t)^3 = \frac{5t}{2} + 4\,\text{sen}\, t + \frac{3\,\text{sen}\, 2t}{4} - \frac{\text{sen}^3 t}{3} + C$$

7. Hallar la $\int \left(\sqrt{\text{sen}\, 2y} - \cos 2y\right)^2 dy.$

Solución

Desarrollando el binomio al cuadrado, tenemos:

$$\int \left(\sqrt{\text{sen}\, 2y} - \cos 2y\right)^2 dy = \int \left(\text{sen}\, 2y - 2\text{sen}^{1/2}\, 2y \cos 2y + \cos^2 2y\right) dy$$

Multiplicamos para obtener:

$$\int \left(\text{sen}\, 2y - 2\,\text{sen}^{1/2}\, 2y \cos 2y + \cos^2 2y\right) dy =$$

$$= \underset{①}{\int \text{sen}\, 2y\, dy} - 2 \underset{②}{\int \text{sen}^{1/2} 2y \cos 2y\, dy} + \underset{③}{\int \cos^2 2y\, dy}$$

Aplicando la fórmula [8] en la integral ①, resulta:

$$\int \text{sen}\, 2y\, dy = -\frac{\cos 2y}{2} + C$$

La integral ② tiene la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$, donde $n = 1$ y que satisface la condición del caso I.

Resolviendo directamente la integral ② por medio de la fórmula [4], resulta:

$$-2\int \text{sen}^{1/2}\, 2y \cos 2y\, dy = -\frac{2\,\textbf{sen}^{3/2}\, 2y}{3} + C$$

Para la integral ③, observamos que tiene la forma $\int \cos^n u\, du$, donde $n = 2$, y satisface la condición del caso II.

Aplicando la fórmula 4: $\cos^2 2y = 1/2 + 1/2 \cos 4y$, resulta:

$$\int \cos^2 2y\,dy = \int (1/2 + 1/2 \cos 4y)\,dy$$

Entonces multiplicamos:

$$\int (1/2 + 1/2 \cos 4y)\,dy = 1/2\underset{(3a)}{\int dy} + 1/2\underset{(3b)}{\int \cos 4y\,dy}$$

Resolvemos directamente la integral (3a) por medio de la fórmula [1], y resulta:

$$1/2\int dy = \frac{y}{2} + C$$

Aplicando la fórmula [9] en la integral (3b), resulta:

$$1/2\int \cos 4y\,dy = \frac{\text{sen } 4y}{8} + C$$

Finalmente escribimos en forma unificada los resultados de cada integral y entonces:

$$\therefore \int \left(\sqrt{\text{sen } 2y} - \cos 2y\right)^2 dy = \frac{y}{2} - \frac{\cos 2y}{2} - \frac{2\,\text{sen}^{3/2} 2y}{3} + \frac{\text{sen } 4y}{8} + C$$

EJERCICIO XV

I. Comprobar las siguientes integrales de productos de potencias pares de senos y cosenos (caso II).

1. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + C$

2. $\int \text{sen}^2 y\,dy = \frac{y}{2} - \frac{\text{sen } 2y}{4} + C$

3. $\int \text{sen}^4\,dz = \frac{3z}{8} - \frac{\text{sen } 2z}{4} + \frac{\text{sen } 4z}{32} + C$

4. $\int \cos^4 x\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{\text{sen } 4x}{32} + C$

5. $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\text{sen } 4x}{32} + C$

6. $\int \text{sen}^6 ax\,dx = \frac{5x}{16} - \frac{\text{sen } 2ax}{4a} + \frac{3\,\text{sen } 4ax}{64a} + \frac{\text{sen}^3 2ax}{48a} + C$

7. $\int \cos^6 2x\,dx = \frac{5x}{16} + \frac{\text{sen } 4x}{8} + \frac{3\,\text{sen } 8x}{128} - \frac{\text{sen}^3 4x}{96} + C$

8. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + C$

9. $\int \operatorname{sen}^4 ay\, dy = \frac{3y}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2ay}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ay}{32a} + C$

10. $\int \cos^2 3x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} + C$

11. $\int \cos^4 ax\, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a} + C$

12. $\int \operatorname{sen}^4 2x \cos^4 2x\, dx = \frac{3x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{256} + \frac{\operatorname{sen} 16x}{2048} + C$

13. $\int \operatorname{sen}^2 z \cos^6 z\, dz = \frac{5z}{128} + \frac{\operatorname{sen}^3 2z}{48} - \frac{\operatorname{sen} 4z}{128} - \frac{\operatorname{sen} 8z}{1024} + C$

14. $\int \left(\sqrt{\cos\theta} - 2 \operatorname{sen}\theta\right)^2 d\theta = 2\theta + \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta + \frac{8 \cos^{3/2}\theta}{3} + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \operatorname{sen}^6 mx\, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^2 3x\, dx$

3. $\int \cos^4 ax\, dx$

4. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

5. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{x}{a} \cos^2 \frac{x}{a}\, dx$

6. $\int \operatorname{sen}^6 2x \cos^6 2x\, dx$

7. $\int (1 + \operatorname{sen} x)^3\, dx$

8. $\int \left(\sqrt{\operatorname{sen} ax} - \cos ax\right)^2 dx$

9. $\int \left(\sqrt{\cos 2y} - 2 \operatorname{sen} 2y\right)^3 dy$

10. $\int (3 - \cos t)^2\, dt$

11. $\int \left(\cos^2 x + \operatorname{sen} x\right)^2 dx$

12. $\int \operatorname{sen}^2 \pi x \cos^2 \pi x\, dx$

3.3 INTEGRACIÓN DE PRODUCTOS DE FUNCIONES SENO Y COSENO CON DIFERENTES ARGUMENTOS EN LA MISMA VARIABLE

Caso III. ***Solución de integrales de la forma:***

$\int \operatorname{sen} mu \cos nu\, du$, $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du$, $\int \cos mu \cos nu\, du$
y $\int \cos mu \operatorname{sen} nu\, du$

***donde el valor de* m *debe ser diferente de* n *y también el valor de* m *debe ser siempre mayor que* n.**

En este caso es posible transformar la expresión diferencial trigonométrica dada, por sustituciones trigonométricas, en una integral inmediata que contiene la suma y la diferencia de senos y cosenos.

Fórmulas trigonométricas por aplicar

1) $\operatorname{sen} mu \cos nu = 1/2 \operatorname{sen}(m+n)u + 1/2 \operatorname{sen}(m-n)u$

2) $\operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu = -1/2 \cos(m+n)u + 1/2 \cos(m-n)u$

3) $\cos mu \cos nu = 1/2 \cos(m+n)u + 1/2 \cos(m-n)u$

4) $\cos mu \operatorname{sen} nu = 1/2 \operatorname{sen}(m+n)u - 1/2 \operatorname{sen}(m-n)u$

Fórmulas de integración directa

1) $$\int \operatorname{sen} mu \cos nu\, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$$

2) $$\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$$

3) $$\int \cos mu \cos nu\, du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$$

4) $$\int \cos mu \operatorname{sen} nu\, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$$

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \text{sen } 3x \cos 5x \, dx$.

Solución

Observamos que la integral propuesta debe ser ordenada en su argumento, es decir:

$$\int \text{sen } 3x \cos 5x \, dx = \int \cos 5x \text{ sen } 3x \, dx$$

Ahora, la integral tiene la forma $\int \cos mu \text{ sen } nu \, du$, donde $m = 5$ y $n = 3$, lo que satisface la condición del caso III.

a) Solución por sustitución trigonométrica:

Aplicamos la fórmula **4**: $\mathbf{\cos mu \text{ sen } nu = 1/2 \text{sen}(m+n)u - 1/2 \text{sen}(m-n)u}$ y resulta:

$$\int \cos 5x \text{ sen } 3x \, dx = \int [1/2 \text{ sen } (5+3)\, x - 1 \text{ sen } (5-3)\, x] \, dx$$

Entonces multiplicamos:

$$\int [1/2 \text{ sen}(5+3)x - 1/2 \text{ sen } (5-3)x] \, dx = 1/2 \underset{①}{\int \text{sen } 8x \, dx} - 1/2 \underset{②}{\int \text{sen } 2x \, dx}$$

Aplicando la fórmula $\boxed{8}$ en las integrales ① y ②, resulta:

$$1/2 \int \text{sen } 8x \, dx = -\frac{\mathbf{\cos 8x}}{\mathbf{16}} + C \quad \text{y} \quad -1/2 \int \text{sen } 2x \, dx = \frac{\mathbf{\cos 2x}}{\mathbf{4}} + C$$

Escribimos en forma unficada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \mathbf{\text{sen } 3x \cos 5x \, dx} = -\frac{\mathbf{\cos 8x}}{\mathbf{16}} + \frac{\mathbf{\cos 2x}}{\mathbf{4}} + C$$

b) Solución por fórmula de integración directa:

Aplicamos la fórmula 4 de integración directa, y resulta:

$$\int \cos 5x \text{ sen } 3x \, dx = -\frac{\cos (5+3)\, x}{2\,(5+3)} + \frac{\cos (5-3)\, x}{2\,(5-3)} + C$$

$$\therefore \int \mathbf{\text{sen } 3x \cos 5x \, dx} = -\frac{\mathbf{\cos 8x}}{\mathbf{16}} + \frac{\mathbf{\cos 2x}}{\mathbf{4}} + C$$

2. Hallar la $\int \operatorname{sen} 4z \operatorname{sen} 3z\, dz$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du$, donde $m = 4$ y $n = 3$, por lo que satisface la condición del caso III.

a) Solución por sustitución trigonométrica:

Aplicamos la fórmula **2**: $\mathbf{sen}\, mu\, \mathbf{sen}\, nu = -1/2 \cos(m+n)u + 1/2 \cos(m-n)u$, y resulta:

$$\int \operatorname{sen} 4z \operatorname{sen} 3z\, dz = \int [-1/2 \cos(4+3)z + 1/2 \cos(4-3)z]\, dz$$

Multiplicamos y tenemos:

$$\int [-1/2 \cos(4+3)z + 1/2 \cos(4-3)z]\, dz = -1/2 \underset{①}{\int \cos 7z\, dz} + 1/2 \underset{②}{\int \cos z\, dz}$$

Aplicando la fórmula $\boxed{9}$ en las integrales ① y ②, resulta:

$$-1/2 \int \cos 7z\, dz = -\frac{\operatorname{sen} 7z}{14} + C \quad \text{y} \quad 1/2 \int \cos z\, dz = \frac{\operatorname{sen} z}{2} + C$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \operatorname{sen} 4z \operatorname{sen} 3z\, dz = -\frac{\operatorname{sen} 7z}{14} + \frac{\operatorname{sen} z}{2} + C$$

b) Solución por fórmula de integración directa:

Aplicamos la fórmula **2** de integración directa, y resulta:

$$\int \operatorname{sen} 4z \operatorname{sen} 3z\, dz = -\frac{\operatorname{sen}(4+3)z}{2(4+3)} + \frac{\operatorname{sen}(4-3)z}{2(4-3)} + C$$

$$\therefore \int \operatorname{sen} 4z \operatorname{sen} 3z\, dz = -\frac{\operatorname{sen} 7z}{14} + \frac{\operatorname{sen} z}{2} + C$$

3. Hallar la $\int \cos 4t \cos t\, dt$.

Solución

Esta integral tiene la forma $\int \cos mu \cos nu\, du$, donde $m = 4$ y $n = 1$, lo que satisface la condición del caso III.

a) Solución por sustitución trigonométrica:

Aplicamos la fórmula 3: $\mathbf{\cos mu \cos nu = 1/2\cos(m+n)u + 1/2\cos(m-n)u}$, y resulta:

$$\int \cos 4t \cos t\, dt = \int [1/2 \cos(4+1)t + 1/2\cos(4-1)t]\, dt$$

Multiplicamos y tenemos:

$$\int [1/2\cos(4+1)t + 1/2\cos(4-1)t]\, dt = 1/2\underset{①}{\int \cos 5t\, dt} + 1/2\underset{②}{\int \cos 3t\, dt}$$

Aplicamos la fórmula $\boxed{9}$ en las integrales ① y ②, y resulta:

$$1/2\int \cos 5t\, dt = \frac{\mathbf{sen\ 5}t}{\mathbf{10}} + C \quad \text{y} \quad 1/2\int \cos 3t\, dt = \frac{\mathbf{sen\ 3}t}{\mathbf{6}} + C$$

Finalmente escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \cos 4t \cos t\, dt = \frac{\text{sen } 5t}{10} + \frac{\text{sen } 3t}{6} + C$$

b) Solución por fórmula de integración directa:

Aplicamos la fórmula 3 de integración directa, y resulta:

$$\int \cos 4t \cos t\, dt = \frac{\text{sen}(4+1)t}{2(4+1)} + \frac{\text{sen}(4-1)t}{2(4-1)} + C$$

$$\therefore \int \cos 4t \cos t\, dt = \frac{\text{sen } 5t}{10} + \frac{\text{sen } 3t}{6} + C$$

4. Hallar la $\int \text{sen } 7y \cos 3y\, dy$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \text{sen } mu \cos nu\, du$, donde $m = 7$ y $n = 3$, lo que satisface la condición del caso III.

a) Solución por sustitución trigonométrica:

Se aplica la fórmula 1: $\int \operatorname{sen} mu \cos nu\, du = 1/2 \operatorname{sen}(m+n)u + 1/2 \operatorname{sen}(m-n)u$, y resulta:

$$\int \operatorname{sen} 7y \cos 3y\, dy = \int [1/2 \operatorname{sen}(7+3)y + 1/2 \operatorname{sen}(7-3)y]\, dy$$

Multiplicamos, y tenemos:

$$\int [1/2 \operatorname{sen}(7+3)y + 1/2 \operatorname{sen}(7-3)y]\, dy = 1/2 \underbrace{\int \operatorname{sen} 10y\, dy}_{①} + 1/2 \underbrace{\int \operatorname{sen} 4y\, dy}_{②}$$

Aplicando la fórmula [8] en las integrales ① y ②, resulta:

$$1/2 \int \operatorname{sen} 10y\, dy = -\frac{\cos 10y}{20} + C \quad y \quad 1/2 \int \operatorname{sen} 4y\, dy = -\frac{\cos 4y}{8} + C$$

Por último, escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \operatorname{sen} 7y \cos 3y\, dy = -\frac{\cos 10y}{20} - \frac{\cos 4y}{8} + C$$

b) Solución por fórmula de integración directa:

Aplicamos la fórmula **1** de integración directa, y resulta:

$$\int \operatorname{sen} 7y \cos 3y\, dy = -\frac{\cos(7+3)y}{2(7+3)} - \frac{\cos(7-3)y}{2(7-3)} + C$$

$$\therefore \int \operatorname{sen} 7y \cos 3y\, dy = -\frac{\cos 10y}{20} - \frac{\cos 4y}{8} + C$$

Solución de integrales combinando los casos II y III (ejemplo)

1. Hallar la $\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x)^2\, dx$.

Solución

Desarrollamos el binomio al cuadrado, y tenemos:

$$\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x)^2\, dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 2x - 2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen}^2 6x\right) dx$$

Multiplicamos:

$$\int \left(\text{sen}^2 2x - 2\,\text{sen}\,2x\,\text{sen}\,6x + \text{sen}^2\,6x\right) dx =$$

$$= \underset{①}{\int \text{sen}^2 2x\,dx} - 2\underset{②}{\int \text{sen}\,6x\,\text{sen}\,2x\,dx} + \underset{③}{\int \text{sen}^2 6x\,dx}$$

La integral ① tiene la forma $\int \text{sen}^m u\,du$ donde $m = 2$, lo que satisface la condición del caso II.

Aplicando la fórmula trigonométrica de senos y cosenos $\mathbf{sen^2\,2x = 1/2 - 1/2\cos 4x}$, resulta:

$$\int \text{sen}^2 2x\,dx = \int (1/2 - 1/2\cos 4x)\,dx$$

Multiplicamos:

$$\int (1/2 - 1/2\cos 4x)\,dx = 1/2\underset{(1a)}{\int dx} - 1/2\underset{(1b)}{\int \cos 4x\,dx}$$

Resolvemos directamente la integral (1a) por medio de la fórmula [1], resulta:

$$1/2\int dx = \frac{x}{2} + C$$

Aplicando la fórmula [9] en la integral (1b), resulta:

$$-1/2\int \cos 4x\,dx = -\frac{\text{sen}\,4x}{8} + C$$

En cuanto a la integral ②, observamos que tiene la forma **2**: $\int \text{sen}\,mu\,\text{sen}\,nu\,du$ donde $m = 6$ y $n = 2$, lo que satisface la condición del caso III.

Aplicamos la fórmula **2** de integración directa, y resulta:

$$-2\int \text{sen}\,6x\,\text{sen}\,2x\,dx = -2\left[\frac{\text{sen}\,(6+2)\,x}{2\,(6+2)} + \frac{\text{sen}\,(6-2)x}{2\,(6-2)}\right] + C$$

$$-2\int \text{sen}\,6x\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{\text{sen}\,8x}{8} - \frac{\text{sen}\,4x}{4} + C$$

La integral ③ tiene la forma $\int \text{sen}^m\,u\,du$ donde $m = 2$, lo que satisface la condición del caso II.

Aplicando la fórmula $\mathbf{sen^2 6x = 1/2 - 1/2\cos 12x}$, resulta:

$$\int \text{sen}^2 6x\,dx = \int (1/2 - 1/2\cos 12x)\,dx$$

Entonces multiplicamos:

$$\int (1/2 - 1/2 \cos 12x)\, dx = 1/2 \underset{(3a)}{\int dx} - 1/2 \underset{(3b)}{\int \cos 12x\, dx}$$

Resolvemos directamente la integral (3a) por medio de la fórmula [1], y resulta:

$$1/2 \int dx = \frac{x}{2} + C$$

Aplicando la fórmula [9] en la integral (3b) resulta:

$$-1/2 \int \cos 12x\, dx = -\frac{\text{sen } 12x}{24} + C$$

Y escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\int (\text{sen } 2x - \text{sen } 6x)^2\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen } 4x}{8} + \frac{\text{sen } 8x}{8} - \frac{\text{sen } 4x}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\text{sen } 12x}{24} + C$$

$$\therefore \int (\text{sen } 2x - \text{sen } 6x)^2\, dx = x - \frac{3 \text{ sen } 4x}{8} + \frac{\text{sen } 8x}{8} - \frac{\text{sen } 12x}{24} + C$$

EJERCICIO XVI

I. Comprobar las siguientes integrales de productos de funciones seno y coseno con diferentes argumentos en la misma variable (caso III).

1. $\int \cos 2x \text{ sen } 4x\, dx = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C$

2. $\int \cos \theta \cos 2\theta\, d\theta = \frac{\text{sen } 3\theta}{6} + \frac{\text{sen } \theta}{2} + C$

3. $\int \cos 3x \cos 2x\, dx = \frac{\text{sen } 5x}{10} + \frac{\text{sen } x}{2} + C$

4. $\int \text{sen } t \text{ sen } 4t\, dt = -\frac{\text{sen } 5t}{10} + \frac{\text{sen } 3t}{6} + C$

5. $\int \text{sen } 4x \text{ sen } 3x\, dx = -\frac{\text{sen } 7x}{14} + \frac{\text{sen } x}{2} + C$

6. $\int \text{sen } 2y \cos 3y \, dy = -\frac{\cos 5y}{10} + \frac{\cos y}{2} + C$

7. $\int \text{sen } ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C$

8. $\int \cos mx \,\text{sen } nx \, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$

9. $\int (\text{sen } x + \cos 2x)^2 dx = x + \cos x - \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{\text{sen } 4x}{8} + C$

10. $\int (\cos y + 2\cos 2y)^2 dx = \frac{5y}{2} + 2\,\text{sen } y + \frac{\text{sen } 4y}{2} + \frac{2\,\text{sen } 3y}{3} + \frac{\text{sen } 2y}{4} + C$

11. $\int (\cos 2z - \text{sen } 3z)^2 dz = z + \frac{\text{sen } 4z}{8} - \cos z - \frac{\cos 5z}{5} - \frac{\text{sen } 6z}{12} + C$

12. $\int (\text{sen } 5x - \text{sen } x)^2 dx = x - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{\text{sen } 4x}{4} - \frac{\text{sen } 6x}{6} - \frac{\text{sen } 10}{20} + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \text{sen } 6x \,\text{sen } 4x \, dx$

2. $\int \cos 8y \cos 5y \, dy$

3. $\int \text{sen } 4t \cos 6t \, dt$

4. $\int \cos x \cos 3x \, dx$

5. $\int \text{sen } 3x \cos 5x \, dx$

6. $\int \text{sen } 4x \,\text{sen } 7x \, dx$

7. $\int (\text{sen } 3z - \text{sen } 2z)^2 dz$

8. $\int (\cos nx - \text{sen } mx)^2 dx$

9. $\int (\text{sen } by - \cos ay)^2 dy$

10. $\int (3\cos x + 2\cos 5x)^2 dx$

11. $\int (\text{sen } 4\theta + 3\,\text{sen } \theta)\, d\theta$

12. $\int (2\cos 6x + \cos 2x)^2 \, dx$

3.4 INTEGRACIÓN DE POTENCIAS DE LA FUNCIÓN TANGENTE O COTANGENTE

Caso IV. ***Solución de integrales de la forma:***

$\int \mathrm{tg}^n\, u\, du$ o $\int \mathrm{ctg}^n\, u\, du$,

donde el valor de n debe ser un número entero.

En este caso, la expresión diferencial trigonométrica dada puede transformarse en una integral inmediata por medio de sustituciones trigonométricas sencillas.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \mathrm{tg}^3\, 2z\, dz$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \mathrm{tg}^n u\, du$, en donde $n = 3$, lo que satisface la condición del caso IV.

Factorizamos el integrando, y tenemos: $\int \mathrm{tg}^3\, 2z\, dz = \int \mathrm{tg}^2\, 2z\, \mathrm{tg}\, 2z\, dz$

Aplicamos la identidad $\mathbf{tg^2\, 2z = sec^2\, 2z - 1}$, y resulta:

$$\int \mathrm{tg}^2\, 2z\, \mathrm{tg}\, 2z\, dz = \int \left(\sec^2 2z - 1\right) \mathrm{tg}\, 2z\, dz$$

Multiplicando, tenemos:

$$\int \left(\sec^2 2z - 1\right) \mathrm{tg}\, 2z\, dz = \underbrace{\int \mathrm{tg}\, 2z \sec^2 2z\, dz}_{①} - \underbrace{\int \mathrm{tg}\, 2z\, dz}_{②}$$

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula $\boxed{4}$, y resulta:

$$\int \mathrm{tg}\, 2z \sec^2 2z\, dz = \frac{\mathrm{tg}^2\, 2z}{4} + C$$

Aplicando la fórmula ⑭ en la integral ②, resulta:

$$-\int \operatorname{tg} 2z\, dz = \frac{1}{2}\ln \cos 2z + C = -\frac{1}{2}\ln \sec 2z + C$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \mathbf{tg^3\, 2z\, dz} = \frac{\mathbf{tg^2\, 2z}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\ln \cos 2z} + C = \frac{\mathbf{tg^2\, 2z}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\ln \sec 2z} + C$$

2. Hallar la $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{2}\, dx$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \operatorname{ctg}^n u\, du$, en donde $n = 5$, lo que satisface la condición del caso IV.

Factorizamos el integrando, y tenemos: $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{2}\, dx = \int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}\, dx$

Aplicamos la identidad: $\mathbf{ctg^2 \frac{x}{2} = csc^2 \frac{x}{2} - 1}$, y resulta:

$$\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}\left(\csc^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx$$

Entonces multiplicamos:

$$\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}\left(\csc^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx = \underset{①}{\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2}\, dx} - \underset{②}{\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}\, dx}$$

Aplicando la fórmula $\boxed{4}$ en la integral ①, resulta:

$$\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2}\, dx = -\frac{\mathbf{ctg^4 \frac{x}{2}}}{\mathbf{2}} + C$$

La integral ② tiene la forma $\int \operatorname{ctg}^n u\, du$, en donde $n = 3$, lo que satisface la condición del caso IV.

Para su solución factorizamos el integrando, y resulta:

$$-\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}\, dx = -\int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\, dx$$

Al aplicar la identidad: $\mathbf{ctg^2 \frac{x}{2} = csc^2 \frac{x}{2} - 1}$, obtenemos:

$$-\int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\, dx = -\int \left(\csc^2 \frac{x}{2} - 1 \right) \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\, dx$$

Al multiplicar, tenemos:

$$-\int \left(\csc^2 \frac{x}{2} - 1 \right) \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\, dx = \underset{(2a)}{-\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2}\, dx} + \underset{(2b)}{\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\, dx}$$

Aplicando la fórmula $\boxed{4}$ en la integral (2a), resulta:

$$-\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2}\, dx = \mathbf{ctg^2 \frac{x}{2} + C}$$

Resolvemos directamente la integral (2b) por medio de la fórmula $\boxed{15}$, y resulta:

$$\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\, dx = \mathbf{\frac{1}{2} \ln \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C}$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{2}\, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2}}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C$$

3. Hallar la $\int \operatorname{tg}^4 ax\, dx$.

Solución

Esta integral tiene la forma $\int \operatorname{tg}^n u\, du$, en donde $n = 4$, lo que satisface la condición del caso IV.

Factorizamos el integrando, y tenemos: $\int \operatorname{tg}^4 ax\, dx = \int \operatorname{tg}^2 ax \operatorname{tg}^2 ax\, dx$.

Aplicando la identidad $\mathbf{tg^2\, ax = sec^2\, ax - 1}$, resulta:

$$\int \operatorname{tg}^2 ax \operatorname{tg}^2 ax\, dx = \int \operatorname{tg}^2 ax \left(\sec^2 ax - 1 \right) dx$$

Multiplicando, tenemos: $\int \operatorname{tg}^2 ax \left(\sec^2 ax - 1 \right) dx = \underset{(1)}{\int \operatorname{tg}^2 ax \sec^2 ax\, dx} - \underset{(2)}{\int \operatorname{tg}^2 ax\, dx}$

Resolvemos directamente la integral (1) por medio de la fórmula $\boxed{4}$, y resulta:

$$\int \operatorname{tg}^2 ax \sec^2 ax\, dx = \mathbf{\frac{tg^3\, ax}{3a} + C}$$

La integral ②, que tiene la forma $\int \operatorname{tg}^n u\, du$, en donde $n = 2$, satisface la condición del caso IV.

Para su solución aplicamos la identidad $\mathbf{tg^2\, ax = sen^2 ax - 1}$, y resulta:

$$-\int \operatorname{tg}^2 ax\, dx = -\int \left(\sec^2 ax - 1\right) dx$$

Multiplicando, tenemos: $-\int \left(\sec^2 ax - 1\right) dx = -\int \sec^2 ax\, dx + \int dx$
(2a) (2b)

Aplicamos la fórmula [10] en la integral (2a), resulta:

$$-\int \sec^2 ax\, dx = -\frac{\mathbf{tg\, ax}}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}$$

Resolvemos directamente la integral (2b) por medio de la fórmula [1], y resulta:

$$\int dx = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \mathbf{tg^4}\, \boldsymbol{ax}\, \boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{tg^3\, ax}}{\mathbf{3a}} - \frac{\mathbf{tg\, ax}}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$$

4. Hallar la $\int \operatorname{ctg}^6 3\theta\, d\theta$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \operatorname{ctg}^n u\, du$, en donde $n = 6$, lo que satisface la condición del caso IV.

Factorizamos el integrando, y tenemos: $\int \operatorname{ctg}^6 3\theta\, d\theta = \int \operatorname{ctg}^4 3\theta \operatorname{ctg}^2 3\theta\, d\theta$.

Aplicando la identidad $\mathbf{ctg^2\, 3\theta = csc^2\, 3\theta - 1}$, resulta:

$$\int \operatorname{ctg}^4 3\theta \operatorname{ctg}^2 3\theta\, d\theta = \int \operatorname{ctg}^4 3\theta \left(\csc^2 3\theta - 1\right) d\theta$$

Multiplicamos, y tenemos: $\int \operatorname{ctg}^4 3\theta \left(\csc^2 3\theta - 1\right) d\theta = \int \operatorname{ctg}^4 3\theta \csc^2 3\theta\, d\theta - \int \operatorname{ctg}^4 3\theta\, d\theta$
① ②

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [4], y resulta:

$$\int \operatorname{ctg}^4 3\theta \csc^2 3\theta\, d\theta = -\frac{\mathbf{ctg^5\, 3\theta}}{\mathbf{15}} + \boldsymbol{C}$$

La integral (2) tiene la forma $\int \text{ctg}^n u\, du$, en donde $n = 4$, lo que satisface la condición del caso IV.

Para su solución factorizamos el integrando, lo que da:

$$-\int \text{ctg}^4 3\theta\, d\theta = -\int \text{ctg}^2 3\theta\, \text{ctg}^2 3\theta\, d\theta$$

Aplicamos la identidad $\mathbf{ctg^2 3\theta = csc^2 3\theta - 1}$, y resulta:

$$-\int \text{ctg}^2 3\theta\, \text{ctg}^2 3\theta\, d\theta = -\int \text{ctg}^2 3\theta\left(\csc^2 3\theta - 1\right) d\theta$$

Multiplicando, tenemos:

$$-\int \text{ctg}^2 3\theta\left(\csc^2 3\theta - 1\right) d\theta = -\underbrace{\int \text{ctg}^2 3\theta \csc^2 3\theta\, d\theta}_{(2a)} + \underbrace{\int \text{ctg}^2 3\theta\, d\theta}_{(2b)}$$

Resolvemos directamente la integral (2a) por medio de la fórmula [4], y resulta:

$$-\int \text{ctg}^2 3\theta \csc^2 3\theta\, d\theta = -\frac{\mathbf{ctg^3 3\theta}}{\mathbf{9}} + C$$

La integral (2b) tiene la forma $\int \text{ctg}^n u\, du$, en donde $n = 2$, lo que satisface la condición del caso IV.

Para su solución aplicamos la identidad $\mathbf{ctg^2 3\theta = csc^2 3\theta - 1}$, lo que da:

$$\int \text{ctg}^2 3\theta\, d\theta = \int \left(\csc^2 3\theta - 1\right) d\theta$$

Multiplicando, tenemos: $\int \left(\csc^2 3\theta - 1\right) d\theta = \underbrace{\int \csc^2 3\theta\, d\theta}_{(2b')} - \underbrace{\int d\theta}_{(2b'')}$

Resolvemos directamente la integral (2b') por medio de la fórmula [11], y resulta:

$$\int \csc^2 3\theta\, d\theta = -\frac{\mathbf{ctg\, 3\theta}}{\mathbf{3}} + C$$

Aplicando la fórmula [1] en la integral (2b''), resulta: $-\int d\theta = -\theta + C$

Por último escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \mathbf{ctg^6\, 3\theta}\, d\theta = -\frac{\mathbf{ctg^5 3\theta}}{\mathbf{15}} + \frac{\mathbf{ctg^3 3\theta}}{\mathbf{9}} - \frac{\mathbf{ctg\, 3\theta}}{\mathbf{3}} - \theta + C$$

5. Hallar la $\int \frac{dx}{\text{ctg}^2 x}$.

Solución

Aplicando la identidad $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ctg^2\, x}} = \mathbf{tg^2\, x}$, resulta : $\int \frac{dx}{\text{ctg}^2 x} = \int \text{tg}^2 x\, dx$.

La integral resultante tiene la forma $\int \text{tg}^n u\, du$, en donde $n = 2$, lo que satisface la condición del caso IV.

Aplicando la identidad **$\mathbf{tg^2\, x = sec^2\, x - 1}$**, resulta:

$$\int \text{tg}^2 x\, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

Multiplicamos, y tenemos: $\int \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \underset{①}{\int \sec^2 x\, dx} - \underset{②}{\int dx}$

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [10], y resulta:

$$\int \sec^2 x\, dx = \mathbf{tg\, x + C}$$

Aplicando la fórmula [1] en la integral ②, resulta: $-\int dx = \mathbf{-x + C}$

Para concluir escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ctg^2\, x}} = \mathbf{tg\, x - x + C}$$

EJERCICIO XVII

I. Comprobar las siguientes integrales de potencias de la función tangente o cotangente (caso IV).

1. $\int \text{tg}^3 \theta\, d\theta = \frac{\text{tg}^2 \theta}{2} + \ln \cos \theta + C$

2. $\int \text{ctg}^3 \frac{z}{3}\, dz = -\frac{3\, \text{ctg}^2 \frac{z}{3}}{2} - 3 \ln \text{sen} \frac{z}{3} + C$

3. $\int \text{tg}^5 3x\, dx = \frac{\text{tg}^4 3x}{12} - \frac{\text{tg}^2 3x}{6} + \frac{1}{3} \ln \sec 3x + C$

4. $\int \text{ctg}^5 at\, dt = -\frac{\text{ctg}^4 at}{4a} + \frac{\text{ctg}^2 at}{2a} + \frac{1}{a} \ln \text{sen}\, at + C$

5. $\int \frac{dy}{\text{ctg}^4 y} = \frac{\text{tg}^3 y}{3} - \text{tg } y + y + C$

6. $\int \text{tg}^6 2x\, dx = \frac{\text{tg}^5 2x}{10} - \frac{\text{tg}^3 2x}{6} + \frac{\text{tg } 2x}{2} - x + C$

7. $\int \frac{dx}{\text{tg}^3 x} = -\frac{\text{ctg}^2 x}{2} - \ln \text{sen } x + C$

8. $\int \text{ctg}^6 \frac{x}{2}\, dx = -\frac{2 \text{ ctg}^5 \frac{x}{2}}{5} + \frac{2 \text{ ctg}^3 \frac{x}{2}}{3} - 2 \text{ ctg}^3 \frac{x}{2} - x + C$

9. $\int \text{tg}^3 5x\, dx = \frac{\text{tg}^2 5x}{10} + \frac{1}{5} \ln \cos 5x + C$

10. $\int \text{ctg}^4 3z\, dz = -\frac{\text{ctg}^3 3z}{9} + \frac{\text{ctg } 3z}{3} + z + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \text{tg}^4 \frac{x}{2}\, dx$

2. $\int \text{ctg}^6 2t\, dt$

3. $\int \text{ctg}^3 (a - bx)\, dx$

4. $\int \text{ctg}^8 \theta\, d\theta$

5. $\int \left(\text{ctg}^3 x + \text{ctg}^5 x\right) dx$

6. $\int (1 + \text{ctg } x)^3\, dx$

7. $\int (1 + \text{tg}\,\theta)^3\, d\theta$

8. $\int \left(\frac{\text{tg } x}{\text{ctg } x}\right)^3 dx$

9. $\int \left(\frac{\text{ctg}\,\theta}{\text{tg}\,\theta}\right)^2 d\theta$

10. $\int (\text{tg } 2x - \text{ctg } 2x)^2\, dx$

11. $\int (\text{ctg } bt - \text{tg } bt)^3\, dt$

12. $\int \left(\text{tg}^2 my + \text{tg}^4 my\right) dy$

13. $\int \text{tg}^5 (m + nx)\, dx$

14. $\int \text{tg}^7 x\, dx$

15. $\int \left(\text{ctg}^2 2x + \text{ctg}^4 2x\right) dx$

16. $\int \left(\text{tg}^3 \theta + \text{tg}^5 \theta\right) d\theta$

17. $\int \frac{\csc^4 x}{\text{ctg}^2 x}\, dx$

18. $\int \frac{\sec^4 x}{\text{tg}^2 x}\, dx$

3.5 INTEGRACIÓN DE POTENCIAS DE LA FUNCIÓN SECANTE O COSECANTE

Caso V. ***Solución de integrales de la forma:***
$\int \sec^n u\, du$ o $\int \csc^n u\, du$,
donde el valor de **n** ***debe ser un número entero positivo par.***

En este caso, la expresión diferencial trigonométrica dada puede transformarse en una integral inmediata por medio de sustituciones trigonométricas sencillas.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \sec^6 ax\, dx$.

Solución

Esta integral tiene la forma $\int \sec^n u\, du$, en donde $n = 6$, lo que satisface la condición del caso V.

Factorizamos el integrando, y tenemos: $\int \sec^6 ax\, dx = \int \left(\sec^2 ax\right)^2 \sec^2 ax\, dx$.

Aplicando la identidad $\mathbf{\sec^2 ax = 1 + tg^2 ax}$, resulta:

$$\int \left(\sec^2 ax\right)^2 \sec^2 ax\, dx = \int \left(1 + \operatorname{tg}^2 ax\right)^2 \sec^2 ax\, dx$$

Desarrollamos el binomio al cuadrado, y tenemos:

$$\int \left(1 + \operatorname{tg}^2 ax\right)^2 \sec^2 ax\, dx = \int \left(1 + 2\operatorname{tg}^2 ax + \operatorname{tg}^4 ax\right) \sec^2 ax\, dx$$

Multiplicando, tenemos:

$$\int \left(1 + 2\operatorname{tg}^2 ax + \operatorname{tg}^4 ax\right)\sec^2 ax\, dx = \underbrace{\int \sec^2 ax\, dx}_{①} + 2\underbrace{\int \operatorname{tg}^2 ax \sec^2 ax\, dx}_{②} + \underbrace{\int \operatorname{tg}^4 ax \sec^2 ax\, dx}_{③}$$

Resolvemos directamente la integral ① por medio de la fórmula [10], y resulta:

$$\int \sec^2 ax\, dx = \frac{\mathbf{tg}\, \boldsymbol{ax}}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}$$

Aplicando la fórmula $\boxed{4}$ en las integrales ② y ③, resulta:

$$2\int \text{tg}^2\, ax \sec^2 ax\, dx = \frac{2\,\text{tg}^3\, ax}{3a} + C \quad \text{y}$$

$$\int \text{tg}^4\, ax \sec^2 ax\, dx = \frac{\text{tg}^5\, ax}{5a} + C$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \sec^6 ax\, dx = \frac{\text{tg}\, ax}{a} + \frac{2\,\text{tg}^3\, ax}{3a} + \frac{\text{tg}^5\, ax}{5a} + C$$

2. Hallar la $\int \csc^4 2z\, dz$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \csc^n u\, du$, en donde $n = 4$, lo que satisface la condición del caso V.

Factorizamos el integrando, y tenemos:

$$\int \csc^4 2z\, dz = \int \csc^2 2z \csc^2 2z\, dz$$

Aplicando la identidad $\csc^2 2z = 1 + \text{ctg}^2\, 2z$, resulta:

$$\int \csc^2 2z \csc^2 2z\, dz = \int \csc^2 2z \left(1 + \text{ctg}^2\, 2z\right) dz$$

Multiplicamos:

$$\int \csc^2 2z \left(1 + \text{ctg}^2\, 2z\right) dz = \underbrace{\int \csc^2 2z\, dz}_{①} + \underbrace{\int \text{ctg}^2\, 2z \csc^2 2z\, dz}_{②}$$

Aplicando la fórmula $\boxed{11}$ en la integral ①, resulta:

$$\int \csc^2 2z\, dz = -\frac{\text{ctg}\, 2z}{2} + C$$

Resolvemos directamente la integral ② por medio de la fórmula $\boxed{4}$, y resulta:

$$\int \text{ctg}^2\, 2z \csc^2 2z\, dz = -\frac{\text{ctg}^3\, 2z}{6} + C$$

Finalmente, escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \mathbf{csc^4 2z\, dz} = -\frac{\mathbf{ctg\, 2z}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{ctg^3 2z}}{\mathbf{6}} + \mathbf{C}$$

3. Hallar la $\int \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta}$.

Solución

Aplicando la identidad $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen^2}\theta} = \mathbf{csc^2}\theta$, resulta:

$$\int \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta} = \int \csc^2 \theta \, d\theta$$

La integral resultante tiene la forma $\int \csc^n u\, du$, en donde $n = 2$, lo que satisface la condición del caso V.

Aplicando la fórmula [11] en dicha integral, obtenemos:

$$\therefore \int \frac{d\theta}{\mathbf{sen^2}\, \theta} = \int \mathbf{csc^2}\theta \, d\theta = \mathbf{-ctg}\, \theta + C$$

EJERCICIO XVIII

I. Comprobar las siguientes integrales de potencias de la función secante o cosecante (caso V).

1. $\int \csc^4 \frac{t}{4}\, dt = -4 \text{ ctg} \frac{t}{4} - \frac{4 \text{ ctg}^3 \frac{t}{4}}{3} + C$

2. $\int \sec^6 x\, dx = \text{tg}\, x + \frac{2 \text{ tg}^3 x}{3} + \frac{\text{tg}^5 x}{5} + C$

3. $\int \csc^6 \frac{z}{2}\, dz = -2 \text{ ctg} \frac{z}{2} - \frac{4 \text{ ctg}^3 \frac{z}{2}}{3} - \frac{2 \text{ ctg}^3 \frac{z}{2}}{5} + C$

4. $\int \sec^4 \frac{y}{2}\, dy = \frac{2 \text{ tg}^3 \frac{y}{2}}{3} + 2 \text{ tg} \frac{y}{2} + C$

5. $\int \sec^4 2\theta\, d\theta = \frac{\text{tg } 2\theta}{2} + \frac{\text{tg}^3 2\theta}{6} + C$

6. $\int \csc^6 z\, dz = -\operatorname{ctg} z - \dfrac{2\operatorname{ctg}^3 z}{3} - \dfrac{\operatorname{ctg}^5 z}{5} + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^4 x} = \operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$

8. $\int \dfrac{dz}{\cos^6 z} = \dfrac{\operatorname{tg}^5 z}{5} + \dfrac{2\operatorname{tg}^3 z}{3} + \operatorname{tg} z + C$

9. $\int \csc^2 \dfrac{3x}{2}\, dx = -\dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}}{3} + C$

10. $\int \sec^2(a - bx)\, dx = -\dfrac{\operatorname{tg}(a - bx)}{b} + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int (\sec x + \csc x)^2\, dx$
2. $\int \left(\sec^2 x - \csc^2 x\right)^2 dx$
3. $\int \left(\csc^2 \theta + \sec^2 \theta\right)^3 d\theta$
4. $\int \left(\operatorname{sen}^2 x - \csc^2 x\right)^2 dx$
5. $\int \left(\cos^2 x + \sec^2 x\right)^2 dx$
6. $\int \csc^4 3z\, dx$
7. $\int \sec^4 my\, dy$
8. $\int \csc^6 x\, dx$
9. $\int \sec^8 x\, dx$
10. $\int t^2 \sec^2 t^3\, dt$
11. $\int \csc^4 6x\, dx$
12. $\int \sec^6 4x\, dx$

3.6 INTEGRACIÓN DE PRODUCTOS DE POTENCIAS DE TANGENTES Y SECANTES O COTANGENTES Y COSECANTES

Para integrar algunas diferenciales trigonométricas fácilmente, es necesario transformarlas en integrales inmediatas por medio de reducciones trigonométricas sencillas.

Caso VI. ***Solución de integrales de la forma:***
$\int \mathbf{tg}^m\, u \sec^n u\, du$ *o* $\int \mathbf{ctg}^m\, u \csc^n u\, du$,
donde el valor* n *debe ser un número entero positivo par o* m *debe ser impar.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int \operatorname{tg}^4 3x \sec^2 3x\, dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$, en donde $n = 2$, lo que satisface la condición del caso VI.

Aplicando directamente la fórmula $\boxed{4}$ en dicha integral, resulta:

$$\therefore \int \mathbf{tg}^4 3x \sec^2 3x\, dx = \frac{\mathbf{tg}^5\, 3x}{15} + C$$

2. Hallar la $\int \operatorname{ctg}^5 2z \csc^2 2z\, dz$.

Solución

Esta integral tiene la forma $\int \operatorname{ctg}^m u \csc^n u\, du$, en donde $m = 5$ y $n = 2$, por lo que ambos valores satisfacen la condición del caso VI.

Aplicamos directamente la fórmula [4] en dicha integral, y resulta:

$$\therefore \int \mathbf{ctg^5 2z \csc^2 2z}\, dz = -\frac{\mathbf{ctg^6 2z}}{\mathbf{12}} + C$$

3. Hallar la $\int \operatorname{tg}^3 \theta \sec^{5/2} \theta \, d\theta$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u \, du$, en donde $m = 3$, lo que satisface la condición del caso VI.

Factorizamos en el integrando, y tenemos:

$$\int \operatorname{tg}^3 \theta \sec^{5/2} \theta \, d\theta = \int \operatorname{tg}^2 \theta \sec^{5/2} \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta.$$

Aplicando la identidad $\mathbf{tg^2\theta = sec^2\theta - 1}$ resulta:

$$\int \operatorname{tg}^2 \theta \sec^{5/2} \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta = \int \left(\sec^2 \theta - 1\right) \sec^{5/2} \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$$

Multiplicando, tenemos:

$$\int \left(\sec^2 - 1\right) \sec^{5/2} \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta = \underbrace{\int \sec^{9/2} \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}_{①} - \underbrace{\int \sec^{5/2} \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}_{②}$$

Factorizamos la función *secante* en la integral ①, y tenemos:

$$\int \sec^{9/2} \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta = \int \sec^{7/2} \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$$

Aplicamos directamente la fórmula [4], y resulta:

$$\int \sec^{7/2} \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta = \frac{\mathbf{2 \sec^{9/2} \theta}}{\mathbf{9}} + C$$

Factorizando la función *secante* en la integral ②, tenemos:

$$\int \sec^{5/2} \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta = -\int \sec^{3/2} \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$$

Aplicamos directamente la fórmula [4], y resulta:

$$\int \sec^{3/2} \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta = -\frac{\mathbf{2 \sec^{5/2} \theta}}{\mathbf{5}} + \mathbf{C}$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \mathbf{tg^3 \theta \sec^{5/2} \theta}\, d\theta = \frac{\mathbf{2 \sec^{9/2} \theta}}{\mathbf{9}} - \frac{\mathbf{2 \sec^{5/2} \theta}}{\mathbf{5}} + C$$

4. Hallar la $\int \text{ctg}^3 mx \csc mx\, dx$.

Solución

Esta integral tiene la forma $\int \text{ctg}^m u \csc^n u\, du$, en donde $m = 3$, lo que satisface la condición del caso VI.

Factorizamos en el integrando, y tenemos:

$$\int \text{ctg}^3 mx \csc mx\, dx = \int \text{ctg}^2 mx \csc mx \text{ ctg } mx\, dx$$

Aplicando la identidad $\mathbf{ctg^2\, mx = csc^2\, mx - 1}$, resulta:

$$\int \text{ctg}^2 mx \csc mx \text{ ctg } mx\, dx = \int \left(\csc^2 mx - 1\right) \csc mx \text{ ctg } mx\, dx$$

Y multiplicamos:

$$\int \left(\csc^2 mx - 1\right) \csc mx \text{ ctg } mx\, dx = \underset{①}{\int \csc^3 mx \text{ ctg } mx\, dx} - \underset{②}{\int \csc mx \text{ ctg } mx\, dx}$$

Factorizando la función *cosecante* en la integral ①, tenemos:

$$\int \csc^3 mx \text{ ctg } mx\, dx = \int \csc^2 mx \csc mx \text{ ctg } mx\, dx$$

Aplicamos directamente la fórmula [4], y resulta:

$$\int \csc^2 mx \csc mx \text{ ctg } mx\, dx = -\frac{\csc^3 mx}{3m} + C$$

Resolvemos directamente la integral ② por medio de la fórmula [13], y resulta:

$$-\int \csc mx \text{ ctg } mx\, dx = \frac{\csc mx}{m} + C$$

Escribimos en forma unificada los resultados de cada integral, y tenemos:

$$\therefore \int \text{ctg}^3 mx \csc mx\, dx = -\frac{\csc^3 mx}{3m} + \frac{\csc mx}{m} + C$$

5. Hallar la $\int \frac{\text{sen}^2 t\, dt}{\cos^4 t}$.

Solución

Factorizamos en el denominador de la integral dada:

$$\int \frac{\text{sen}^2 t\, dt}{\cos^4 t} = \int \frac{\text{sen}^2 t\, dt}{\cos^2 t \cos^2 t}$$

Aplicamos las identidades $\frac{\mathbf{sen}^2 t}{\mathbf{cos}^2 t} = \mathbf{tg}^2 t$ y $\frac{1}{\mathbf{cos}^2 t} = \mathbf{sec}^2 t$, y resulta:

$$\int \frac{\text{sen}^2 t\, dt}{\cos^2 t \cos^2 t} = \int \text{tg}^2 t \sec^2 t\, dt$$

La integral resultante tiene la forma $\int \text{tg}^m u \sec^n u\, du$, en donde $n = 2$, lo que satisface la condición del caso VI.

Aplicando directamente la fórmula 4 en dicha integral, resulta:

$$\therefore \int \frac{\text{sen}^2 t\, dt}{\cos^4 t} = \int \text{tg}^2 t \sec^2 t\, dt = \frac{\text{tg}^3 t}{3} + C$$

6. Hallar la $\int \frac{dx}{\text{sen}^4 3x \cos^2 3x}$.

Solución

Aplicamos las identidades $\frac{1}{\mathbf{sen}^4 3x} = \mathbf{csc}^4 3x$ y $\frac{1}{\mathbf{cos}^2 3x} = \mathbf{sec}^2 3x$, resulta:

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^4 3x \cos^2 3x} = \int \csc^4 3x \sec^2 3x\, dx$$

Factorizando la función *cosecante* de la integral, tenemos:

$$\int \csc^4 3x \sec^2 3x\, dx = \int \left(\csc^2 3x\right)^2 \sec^2 3x\, dx$$

Aplicamos la identidad $\mathbf{csc}^2 3x = 1 + \mathbf{ctg}^2 3x$, y resulta:

$$\int \left(\csc^2 3x\right)^2 \sec^2 3x\, dx = \int \left(1 + \text{ctg}^2 3x\right)^2 \sec^2 3x\, dx$$

Desarrollando el binomio al cuadrado, tenemos:

$$\int \left(1 + \text{ctg}^2 3x\right)^2 \sec^2 3x\, dx = \int \left(1 + 2\,\text{ctg}^2 3x + \text{ctg}^4 3x\right) \sec^2 3x\, dx$$

Multiplicamos, y tenemos: $\int \left(1 + 2\,\text{ctg}^2 3x + \text{ctg}^4 3x\right) \sec^2 3x\, dx =$

$$= \underbrace{\int \sec^2 3x\, dx}_{①} + 2 \underbrace{\int \text{ctg}^2 3x \sec^2 3x\, dx}_{②} + \underbrace{\int \text{ctg}^4 3x \sec^2 3x\, dx}_{③}$$

Aplicando la fórmula [10] en la integral ①, resulta: $\int \sec^2 3x\, dx = \frac{\mathbf{tg}\, 3x}{3} + C$

Aplicamos las identidades $\mathbf{ctg}^2 3x = \frac{\mathbf{cos}^2 3x}{\mathbf{sen}^2 3x}$ y $\mathbf{sec}^2 3x = \frac{1}{\mathbf{cos}^2 3x}$ en la inte-

gral ②, y tenemos: $2\int \text{ctg}^2 3x \sec^2 3x\, dx = 2\int\left(\frac{\cos^2 3x}{\text{sen}^2 3x}\right)\left(\frac{1}{\cos^2 3x}\right)dx$

Simplificando, resulta: $2\int \frac{dx}{\text{sen}^2 3x}$

Aplicamos la identidad $\frac{1}{\textbf{sen}^2\, 3x} = \csc^2 3x$, y resulta: $2\int \frac{dx}{\text{sen}^2 3x} = 2\int \csc^2 3x\, dx$

Entonces resolvemos directamente la integral resultante por medio de la fórmula [11] :

$$2\int \csc^2 3x\, dx = -\frac{2\,\text{ctg}\, 3x}{3} + C$$

Aplicando las identidades $\textbf{ctg}^4\, 3x = \frac{\cos^4 3x}{\text{sen}^4 3x}$ y $\sec^2 3x = \frac{1}{\cos^2 3x}$ en la integral ③, tenemos $\int \text{ctg}^4 3x \sec^2 3x\, dx = \int\left(\frac{\cos^4 3x}{\text{sen}^4 3x}\right)\left(\frac{1}{\cos^2 3x}\right)dx$

Simplificamos, y resulta: $\int \frac{\cos^2 3x\, dx}{\text{sen}^4 3x}$

Factorizamos en el denominador de la integral resultante:

$$\int \frac{\cos^2 3x\, dx}{\text{sen}^4 3x} = \int \frac{\cos^2 3x\, dx}{\text{sen}^2 3x\, \text{sen}^2 3x}$$

Aplicando las identidades $\frac{\cos^2 3x}{\text{sen}^2 3x} = \text{ctg}^2 3x$ y $\frac{1}{\text{sen}^2 3x} = \csc^2 3x$ resulta:

$$\int \frac{\cos^2 3x\, dx}{\text{sen}^2 3x\, \text{sen}^2 3x} = \int \text{ctg}^2 3x \csc^2 3x\, dx$$

La integral resultante tiene la forma $\int \text{ctg}^m u \csc^n u\, du$, en donde $n = 2$, lo que satisface la condición del caso VI.

Aplicamos directamente la fórmula [4] en dicha integral, y resulta:

$$\int \text{ctg}^2 3x \csc^2 3x\, dx = -\frac{\text{ctg}^3 3x}{9} + C$$

Por último, escribimos en forma unificada los resultados de cada integral:

$$\therefore \int \frac{dx}{\text{sen}^4 3x \cos^2 3x} = \frac{\text{tg}\, 3x}{3} - \frac{2\,\text{ctg}\, 3x}{3} - \frac{\text{ctg}^3 3x}{9} + C$$

7. Hallar la $\int \frac{\sec^4 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x}$.

Solución

Factorizamos en el numerador de la integral dada:

$$\int \frac{\sec^4 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{\sec^2 x \sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x}$$

Aplicando la identidad $\mathbf{\sec^2 x = 1 + tg^2 x}$, resulta:

$$\int \frac{\sec^2 x \sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x}$$

Al multiplicar, tenemos:

$$\int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x} + \int \frac{\operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \underbrace{\int \operatorname{tg}^{-3} x \sec^2 x\,dx}_{①} + \underbrace{\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg} x}}_{②}$$

Aplicando la fórmula $\boxed{4}$ en la integral ①, resulta:

$$\int \operatorname{tg}^{-3} x \sec^2 x\,dx = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C$$

Resolvemos directamente la integral ② por medio de la fórmula $\boxed{5}$, y resulta:

$$\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\operatorname{tg} x} = \ln \operatorname{tg} x + C$$

Finalmente, escribimos en forma unificada los resultados de cada integral:

$$\therefore \int \frac{\sec^4 x\,dx}{\operatorname{tg}^3 x} = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln \operatorname{tg} x + C$$

EJERCICIO XIX

I. Comprobar las siguientes integrales de productos de potencias de tangentes y secantes o cotangentes y cosecantes (caso VI).

1. $\int \operatorname{tg}^n x \sec^4 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1} + \frac{\operatorname{tg}^{n+3} x}{n+3} + C$

2. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x\,dx}{\sqrt{\sec x}} = \frac{2\sec^{3/2} x}{3} + 2\sqrt{\cos x} + C$

3. $\int \left(\frac{\operatorname{tg} ax}{\cos ax}\right)^4 dx = \frac{\operatorname{tg}^5 ax}{5a} + \frac{\operatorname{tg}^7 ax}{7a} + C$

4. $\int \left(\frac{\csc bt}{\operatorname{tg} bt}\right)^2 dt = -\frac{\operatorname{ctg}^3 bt}{3b} + C$

5. $\int\left(\frac{\csc az}{\operatorname{ctg} az}\right)^4 dx = \frac{\operatorname{tg}^3 az}{3a} + \frac{\operatorname{tg} az}{a} + C$

6. $\int \frac{\cos^4 z\, dz}{\operatorname{sen}^6 z} = -\frac{\operatorname{ctg}^5 z}{5} + C$

7. $\int \operatorname{tg}^4 t \sec^4 t\, dt = \frac{\operatorname{tg}^7 t}{7} + \frac{\operatorname{tg}^5 t}{5} + C$

8. $\int \operatorname{ctg}^3 \theta \csc^4 \theta\, d\theta = -\frac{\operatorname{ctg}^4 \theta}{4} - \frac{\operatorname{ctg}^6 \theta}{6} + C$

9. $\int \operatorname{ctg}^3 y \csc^3 y\, dy = -\frac{\csc^5 y}{5} + \frac{\csc^3 y}{3} + C$

10. $\int \operatorname{tg} \theta \sqrt{\sec \theta}\, d\theta = 2\sqrt{\sec \theta} + C$

11. $\int \frac{\operatorname{sen}^{3/2} \theta\, d\theta}{\cos^{11/2} \theta} = \frac{2\operatorname{tg}^{5/2} \theta}{5} + \frac{2\operatorname{tg}^{9/2} \theta}{9} + C$

12. $\int \operatorname{ctg}^3 x \csc^5 x\, dx = -\frac{\csc^7 x}{7} + \frac{\csc^5 x}{5} + C$

13. $\int \operatorname{tg}^3 ax \sec^4 ax\, dx = \frac{\operatorname{tg}^4 ax}{4a} + \frac{\operatorname{tg}^6 ax}{6a} + C$

14. $\int \operatorname{tg}^3 2z \sec 2z\, dz = \frac{\sec^3 2z}{6} - \frac{\sec 2z}{2} + C$

15. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{3} \sec^3 \frac{\theta}{3}\, d\theta = \frac{3\sec^{5\frac{\theta}{3}}}{5} - \sec^3 \frac{\theta}{3} + C$

16. $\int\left(\frac{\sec mx}{\operatorname{tg} mx}\right)^4 dx = -\frac{\operatorname{ctg}^3 mx}{3m} - \frac{\operatorname{ctg} mx}{m} + C$

17. $\int \operatorname{tg}^2 \theta \sec^3 \theta\, d\theta = \frac{\sec^3 \theta \operatorname{tg} \theta}{4} - \frac{\sec \theta \operatorname{tg} \theta}{8} - \frac{\ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)}{8} + C$

18. $\int \operatorname{tg}^3 2y \sec^3 2y\, dy = \frac{\sec^5 2y}{10} - \frac{\sec^3 2y}{6} + C$

19. $\int \operatorname{ctg} mx \csc^4 mx\, dx = -\dfrac{\operatorname{ctg}^2 mx}{2m} - \dfrac{\operatorname{ctg}^4 mx}{4m} + C$

20. $\int \operatorname{tg}^{3/2} mx \sec^4 mx = \dfrac{2\operatorname{tg}^{5/2} mx}{5m} + \dfrac{2\operatorname{tg}^{9/2} mx}{9m} + C$

II. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \dfrac{\csc^4 x\, dx}{\operatorname{ctg}^3 x}$
2. $\int \dfrac{dx}{\cos^4 3x\, sen^2 3x}$
3. $\int \dfrac{\cos^2 t\, dt}{\operatorname{sen}^4 t}$
4. $\int \operatorname{tg}^3 ax \sec ax\, dx$
5. $\int \operatorname{ctg}^3 \theta \csc^{5/2} \theta\, d\theta$
6. $\int \operatorname{tg}^5 2t \sec^2 2t\, dt$
7. $\int \operatorname{ctg}^4 3y \csc^4 3y\, dy$
8. $\int \operatorname{ctg}^n x \csc^4 x\, dx$
9. $\int \operatorname{ctg}^3 \dfrac{x}{3} \csc^3 \dfrac{x}{3}\, dx$
10. $\int \dfrac{\cos^{3/2} x\, dx}{\operatorname{sen}^{11/2} x}$
11. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^4 x\, dx}{\cos^6 x}$
12. $\int \operatorname{ctg}^2 \theta \csc^3 \theta\, d\theta$
13. $\int \dfrac{\operatorname{ctg}^3 x\, dx}{\sqrt{\csc x}}$
14. $\int \operatorname{tg} mx \sec^4 mx\, dx$
15. $\int \operatorname{tg}^3 \theta \sec^5 \theta\, d\theta$
16. $\int \operatorname{ctg}^3 2y \csc 2y\, dy$
17. $\int \operatorname{ctg}^{3/2} az \csc^4 az\, dz$
18. $\int \operatorname{ctg}^4 x \csc^4 x\, dx$
19. $\int \operatorname{ctg} x \sqrt{\csc x}\, dx$
20. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx$
21. $\int \operatorname{ctg}^5 2x \csc^2 2x\, dx$

UNIDAD 4

APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

4.1 CÁLCULO DE LA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN

Determinación de la constante de integración por medio de condiciones iniciales

Para determinar el valor de la constante de integración C, se toman en cuenta los siguientes datos básicos:

a) Derivada de la función DF
b) Valor de la variable VV
c) Valor correspondiente de la función VCF

EJEMPLOS

1. Hallar una función cuya primera derivada sea $3x^2 - 4x + 1$, y tenga el valor de -9 cuando $x = -1$.

Solución

	DF	VV	VCF
Tenemos como datos:	$\left\{ \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1 \right.$	$x = -1$	$y = -9$
Integrando, resulta:	$\left\{ \int dy = \int \left(3x^2 - 4x + 1\right) dx \right.$		

$$\boldsymbol{y = x^3 - 2x^2 + x + C}$$

En la expresión resultante sustituimos el valor de la variable y el valor correspondiente de la función, y resulta:

$$y = x^3 - 2x^2 + x + C$$
$$-9 = (-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + C$$
$$-9 = -1 - 2 - 1 + C, \text{ de donde: } C = -5$$

$\therefore$ **La función buscada es** $\boldsymbol{y = x^3 - 2x^2 + x - 5}$

2. Hallar una función cuya primera derivada sea $\cos x + \operatorname{sen} x$, y tenga el valor de 2 cuando $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución

	DF	VV	VCF
Tenemos como datos:	$\left\{ \frac{dy}{dx} = \cos x + \text{sen } x \right.$	$x = \frac{\pi}{2} = 90°$	$y = 2$

Integrando, resulta: $\left\{ \int dy = \int (\cos x + \text{sen } x)\, dx \right.$

$$\mathbf{y = \text{sen } x - \cos x + C}$$

En la expresión resultante sustituimos el valor de la variable y el valor correspondiente de la función, y resulta:

$y = \text{sen } x - \cos x + C$

$2 = \text{sen } 90° - \cos 90° + C$

$2 = 1 - 0 + C$, de donde: $\mathbf{C = 1}$

∴ La función buscada es

$$\mathbf{y = \text{sen } x - \cos x + 1}$$

3. Hallar una función cuya primera derivada sea $\frac{1}{x^2 + a^2}$, y tenga el valor de $\frac{\pi}{2a}$ cuando $x = a$.

Solución

	DF	VV	VCF
Tenemos como datos:	$\left\{ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + a^2} \right.$	$x = a$	$y = \frac{\pi}{2a}$

Integrando, resulta: $\left\{ \int dy = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \right.$

$$\mathbf{y = \frac{1}{a} \text{arc tg} \frac{x}{a} + C}$$

En la expresión resultante sustituimos el valor de la variable y el valor correspondiente de la función:

$y = \frac{1}{a} \text{arc tg } \frac{x}{a} + C$

$\frac{\pi}{2a} = \frac{1}{a} \text{arc tg } \frac{a}{a} + C$

$\frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{4a} + C$, de donde: $\mathbf{C = \frac{\pi}{4a}}$

∴ La función buscada es

$$\mathbf{y = \frac{1}{a} \text{arc tg} \frac{x}{a} + \frac{\pi}{4a}}$$

4. Hallar una función cuya primera derivada sea $3te^{2t^2}$, y tenga el valor de 4 cuando $t = 0$.

Solución

	DF	VV	VCF
Tenemos como datos:	$\frac{ds}{dt} = 3t\,e^{2t^2}$	$t = 0$	$s = 4$

Integrando, resulta: $\int ds = \int 3t\,e^{2t^2}\,dt$

$$s = \frac{3e^{2t^2}}{4} + C$$

En la expresión resultante sustituimos el valor de la variable y el valor correspondiente de la función, y resulta:

$$s = \frac{3e^{2t^2}}{4} + C$$

$$4 = \frac{3e^{2(0)^2}}{4} + C$$

$$4 = \frac{3}{4} + C, \text{ de donde: } C = \frac{13}{4}$$

∴ La función buscada es

$$s = \frac{3e^{2t^2}}{4} + \frac{13}{4}$$

5. Se tiene $dy = (4x + 2)\,dx$, $y = 17$ cuando $x = 2$. Hallar el valor de y cuando $x = 5$.

Solución

Integrando $dy = (4x + 2)\,dx$, tenemos: $\int dy = \int (4x+2)\,dx$

$$y = 2x^2 + 2x + C$$

Sustituimos en la expresión resultante el valor de la variable y el valor correspondiente de la función:

$$y = 2x^2 + 2x + C$$

$$17 = 2(2)^2 + 2(2) + C$$

$$17 = 8 + 4 + C, \text{ de donde: } C = 5$$

Ahora, necesitamos conocer el valor de y cuando $x = 5$, y tenemos:

$$y = 2x^2 + 2x + 5$$

$$y = 2(5)^2 + 2(5) + 5$$

$$y = 50 + 10 + 5$$

$$y = 65$$

∴ Cuando $x = 5$, el valor de y es 65

Determinación de la constante de integración por medio de su significado geométrico

Para determinar la constante de integración a partir del significado geométrico, tomaremos en cuenta la relación del cálculo integral y diferencial con la geometría analítica.

EJEMPLOS

1. Determinar la ecuación de la curva cuya tangente en cada punto tenga de pendiente $5x$ y que pasa por el punto A (2, 3).

Solución

Puesto que la pendiente de la tangente a una curva en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx}$, tenemos, por hipótesis, que: $\frac{dy}{dx} = 5x$. Integrando, resulta: $\int dy = \int 5x\, dx$

$$y = \frac{5x^2}{2} + C$$

Como la curva pasa por el punto A (2, 3), tenemos:

$$y = \frac{5x^2}{2} + C$$

$$3 = \frac{5(2)^2}{2} + C$$

$3 = 10 + C$, de donde: $C = -7$

$\therefore$ **La ecuación de la curva es** $y = \frac{5x^2}{2} - 7$ **que representa una parábola.**

2. Hallar la ecuación de la familia de curvas en que la pendiente de la tangente en un punto cualquiera tiene el valor de 3.

Solución

Dado que la pendiente de la tangente a una curva en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx}$, tenemos, por hipótesis, que: $\frac{dy}{dx} = 3$. Integrando, resulta: $\int dy = \int 3\, dx$

$$y = 3x + C$$

La ecuación de una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones independientes, por ejemplo, dos de sus puntos o uno de sus puntos y su dirección.

Una recta que cumple solamente una condición no es una recta única, por lo que existe una infinidad de rectas que satisfacen dicha condición y tienen una propiedad común.

A la totalidad de las rectas que cumple con una única condición geométrica se le llama *familias de líneas rectas* o *haz de rectas*.

Al tomar C un valor particular, se obtiene la ecuación de cualquiera de las rectas que forman la familia.

Si damos a C diferentes valores, por ejemplo 4, 0 y -2, entonces tenemos las siguientes ecuaciones:

$$y = 3x + 4 \qquad y = 3x \qquad y = 3x - 2$$

Sus lugares geométricos representan una familia o haz de rectas, tal y como se muestra en la Figura 1.

En la ecuación $y = 3x + C$, la constante de integración representa el segmento que la recta determina sobre el eje y.

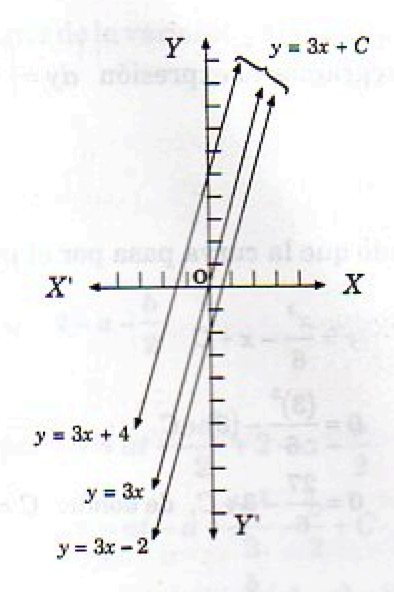


Figura 1

∴ La ecuación $y = 3x + C$ representa la totalidad de rectas que forman una familia o haz de rectas paralelas y que tienen la propiedad común de que su pendiente es 3.

3. En cada punto de cierta curva es $y'' = x$. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto $A\,(3, 0)$ y que tiene en ese punto la pendiente de 7/2.

Solución

Determinando la primera derivada de la expresión dada, tenemos: $y'' = x$

$$\int y'' = \int x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C$$

Puesto que la curva pasa por el punto $A\,(3, 0)$ y tiene en ese punto la pendiente de 7/2, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{7}{2} = \frac{(3)^2}{2} + C$$

$$\frac{7}{2} = \frac{9}{2} + C, \text{ de donde: } C = -1$$

Integramos la expresión $dy = \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) dx$, y tenemos: $\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) dx$.

$$\boldsymbol{y = \frac{x^3}{6} - x + C}$$

Dado que la curva pasa por el punto A (3, 0), tenemos:

$$y = \frac{x^3}{6} - x + C$$

$$0 = \frac{(3)^3}{6} - (3) + C$$

$$0 = \frac{27}{6} - 3 + C, \text{ de donde: } \boldsymbol{C = -9/6}$$

∴ La ecuación buscada es

$\boldsymbol{y = \frac{x^3}{6} - x - 3/2}$, o bien:

$$\boldsymbol{6y = x^3 - 6x - 9}$$

Determinación de la constante de integración por medio de su significado físico

Para determinar la constante de integración a partir del significado físico, tomaremos en cuenta las leyes que rigen el movimiento rectilíneo.

EJEMPLOS

1. Dada la relación $v = a + bt$ entre *velocidad* y *tiempo*, hallar la relación entre distancia (s) y tiempo (t), si $s = 2$ cuando $t = 1$.

Solución

Puesto que la derivada del espacio con respecto al tiempo es la velocidad en un instante cualquiera, tenemos: $v = \frac{ds}{dt}$

Sustituimos en la relación dada: $v = a + bt$

$$\frac{ds}{dt} = a + bt$$

Integrando, resulta: $\int ds = \int (a + bt)\, dt$

$$\boldsymbol{s = at + \frac{bt^2}{2} + C}$$

En la expresión resultante sustituimos el valor de la variable y el valor correspondiente de la función:

$$s = at + \frac{bt^2}{2} + C$$

$$2 = a(1) + \frac{b(1)^2}{2} + C$$

$$2 = a + \frac{b}{2} + C, \text{ de donde}: \mathbf{C = 2 - a - \frac{b}{2}}$$

La relación entre la distancia y el tiempo es: $s = at + \frac{bt^2}{2} + 2 - a - \frac{b}{2}$

$$s = at - a + \frac{bt^2}{2} - \frac{b}{2} + C$$

$$\therefore \mathbf{s = a(t-1) + \frac{b}{2}(t^2 - 1) + 2}$$

2. La *aceleración* está expresada por $a = 4 - t^2$. Hallar la relación entre *velocidad* y *tiempo* si $v = 2$ cuando $t = 3$.

Solución

La *aceleración* se define como la rapidez de variación de la velocidad con respecto al tiempo, es decir: $a = \frac{dv}{dt}$

Sustituimos en la relación dada, y tenemos: $a = 4 - t^2$

$$\frac{dv}{dt} = 4 - t^2$$

Integrando, resulta: $\int dv = \int (4 - t^2)\, dt$

$$\mathbf{v = 4t - \frac{t^3}{3} + C}$$

En la expresión resultante sustituimos el valor de la variable y el valor correspondiente de la función:

$$v = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

$$2 = 4(3) - \frac{(3)^3}{3} + C$$

$$2 = 12 - 9 + C, \text{ de donde}: \mathbf{C = -1}$$

$\therefore$ **La relación entre velocidad y tiempo es** $\mathbf{v = 4t - \frac{t^3}{3} - 1}$

3. La *aceleración* está expresada por $a = -32$. Hallar la relación entre *distancia* y *tiempo*, si $s = 0$ y $v = 20$ cuando $t = 0$.

Solución

Puesto que $a = \frac{dv}{dt}$ al sustituir en la relación dada, tenemos:

$$a = -32$$
$$\frac{dv}{dt} = -32$$

Integrando, resulta: $\int dv = \int -32\, dt$

$$v = -32t + C$$

Sustituyendo en la expresión resultante $t = 0$ y $v = 20$, tenemos:

$v = -32t + C$

$20 = -32(0) + C$

$20 = -0 + C$, de donde: $C = 20$

$\therefore$ **La relación entre velocidad y tiempo es $v = -32t + 20$**

Como $v = \frac{ds}{dt}$, sustituyendo en la relación anterior, tenemos:

$$v = -32t + 20$$
$$\frac{ds}{dt} = -32t + 20$$

Integrando, resulta: $\int ds = \int (-32t + 20)\, dt$

$$s = -16t^2 + 20t + C$$

Sustituimos en la expresión resultante $t = 0$ y $s = 0$, y resulta:

$s = -16t^2 + 20t + C$

$0 = -16(0)^2 + 20(0) + C$

$0 = -0 + 0 + C$, de donde: $C = 0$

$\therefore$ **La relación entre velocidad y tiempo es $s = -16t^2 + 20t$**

4. ¿Con qué velocidad golpeará una piedra el suelo si se deja caer desde lo alto de una torre de 104 metros de altura?

Solución

Puesto que la aceleración se define como $a = \frac{dv}{dt}$, tenemos que, al integrar, resulta:

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$\int dv = \int a\, dt$$

$$v = at + C$$

Si la *velocidad inicial* (v_0) es $v = v_0$ cuando $t = 0$, tenemos:

$v = at + C$

$v_0 = a(0) + C$

$v_0 = 0 + C$, de donde: $\boldsymbol{C = v_0}$

$\therefore$ **La ecuación resultante es $\boldsymbol{v = a t^2 + v_0}$** ①

Como $v = \dfrac{ds}{dt}$ al sustituir en la ecuación anterior, tenemos: $v = at + v_0$

$$\frac{ds}{dt} = at + v_0$$

Integrando, resulta: $\int ds = \int (at + v_0)\, dt$

$$\boldsymbol{s = \frac{at^2}{2} + v_0\, t + C}$$

Integrando, si la *distancia inicial* (s_0) es $s = s_0$ cuando $t = 0$, tenemos:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C$$

$$s_0 = \frac{a(0)^2}{2} + v_0(0) + C$$

$s_0 = 0 + 0 + C$, de donde: $\boldsymbol{C = s_0}$

$\therefore$ **La ecuación resultante es $\boldsymbol{s = \dfrac{at^2}{2} + v_0\, t + s_0}$** ②

Sustituyendo en ① y ② los valores $a = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ y $s = h$, obtenemos las leyes del movimiento de un cuerpo que cae en el vacío partiendo del reposo (sea g la gravedad y h la altura), es decir:

① $v = at + v_0$

$v = gt + 0$

$\therefore \boldsymbol{v = gt}$

② $s = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$

$h = \dfrac{gt^2}{2} + (0)t + 0$

$\therefore \boldsymbol{h = 1/2gt^2}$

Despejamos t en ① y resulta: $v = gt$

$$\boldsymbol{t = \frac{v}{g}}$$

Sustituimos en ②, y tenemos: $h = 1/2\, gt^2$

$$h = 1/2\, g\left(\frac{v}{g}\right)^2 = 1/2\, g\left(\frac{v^2}{g^2}\right) = \boldsymbol{1/2\frac{v^2}{g}}$$

Al despejar v, resulta: $h = 1/2\dfrac{v^2}{g}$

$$2gh = v^2$$

$$\therefore v = \sqrt{2gh} \qquad ③$$

Sustituyendo los datos del problema dado en la ecuación ③, resulta:

$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8\,\text{m/s}^2)(104\,\text{m})}$

$v = \sqrt{2038.4\,\text{m}^2/\text{s}^2}$

$\mathbf{v = 45.149\ m/s}$

$\therefore$ **La velocidad con que la piedra llegará al suelo es de 45.149 m/s**

5. Un tren parte de una estación de ferrocarril. Si su aceleración es de $0.006t + 0.15$ m/s², ¿qué distancia recorrerá en **20 segundos**?

Solución

Si en la expresión $a = 0.006t + 0.15$ sustituimos $a = \dfrac{dv}{dt}$, resulta:

$$\frac{dv}{dt} = 0.006t + 0.15$$

Integrando, tenemos: $\int dv = \int (0.006\,t + 0.15)\,dt$

$$\mathbf{v = 0.003t^3 + 0.15t + C}$$

Si la *velocidad inicial* (v_0) es $v = v_0$ cuando $t = 0$, tenemos:

$v = 0.003t^2 + 0.15\,t + C$

$v_0 = 0.003(0)^2 + 0.15(0) + C$

$v_0 = 0 + 0 + C$, de donde: $\mathbf{C = v_0}$

$\therefore$ **La ecuación resultante es $v = 0.003t^2 + 0.15t + v_0$**

Como $v = \dfrac{ds}{dt}$, al sustituir en la ecuación anterior, tenemos:

$$v = 0.003\,t^2 + 0.15\,t + v_0$$

$$\frac{ds}{dt} = 0.003\,t^2 + 0.15\,t + v_0$$

Al integrar, resulta: $\int ds = \int (0.003t^2 + 0.15t + v_0)\,dt$

$$\mathbf{s = 0.001\,t^3 + \frac{0.15t^2}{2} + v_0\,t + C}$$

Si la *distancia inicial* (s_0) en $s = s_0$ cuando t = 0, tenemos:

$$s = 0.001t^3 + \frac{0.15t^2}{2} + v_o t + C$$

$$s_o = 0.001(0)^3 + \frac{0.15(0)^2}{2} + v_o(0) + C$$

$s_o = 0 + 0 + 0 + C$, de donde: $C = s_o$

$\therefore$ **La ecuación resultante es** $\boldsymbol{s = 0.001t^3 + \frac{0.15t^2}{2} + u_o t + s_o}$

Sustituyendo en la ecuación anterior los valores de $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ y $t = 20$ s tenemos:

$$s = 0.001t^3 + \frac{0.15t^2}{2} + v_o t + s_o$$

$$s = 0.001(20)^3 + \frac{0.15(20)^2}{2} + (0)(20) + 0$$

$s = 8 + 30 + 0 + 0 =$ **38 metros**

$\therefore$ **La distancia que recorre el tren a los 20 segundos de su partida es 38 metros.**

6. Un proyectil se dispara contra una pared vertical situada a una distancia de 147 metros. La velocidad inicial es de 49 m/s y $\alpha = 45^0$ es el ángulo de tiro. Despreciando la resistencia del aire, hallar la altura del impacto del proyectil en la pared.

Solución

Consideramos el plano *XOY* como el plano del movimiento, *OX* como el horizontal y *OY* como el vertical; supongamos además que el proyectil parte del origen (*O*). Ver la Figura 2.

Supongamos que sólo la fuerza de la gravedad influye en el proyectil, es decir, la aceleración es cero en el sentido horizontal y $-g$ en el sentido vertical. Entonces:

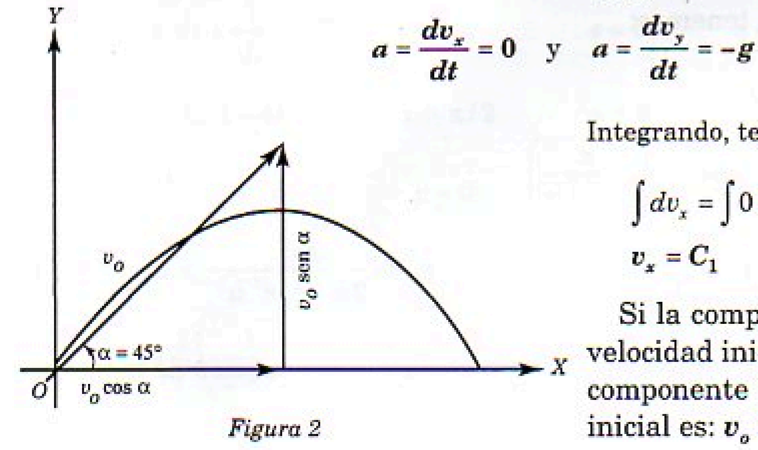


Figura 2

$$a = \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad a = \frac{dv_y}{dt} = -g$$

Integrando, tenemos:

$$\int dv_x = \int 0\, dt \quad \text{y} \quad \int dv_y = \int -g\, dt$$

$$v_x = C_1 \qquad\qquad v_y = -gt + C_2$$

Si la componente horizontal de la velocidad inicial es: v_o **cos** α, y si la componente vertical de la velocidad inicial es: v_o **sen** α.

Entonces $C_1 = v_o \cos\alpha$ y $C_2 = v_o \operatorname{sen}\alpha$, tenemos que:

$\boldsymbol{v_x = v_o \cos\alpha}$ y $\boldsymbol{v_y = -gt + v_o \operatorname{sen}\alpha}$

Puesto que $v_x = \frac{dx}{dt}$ y $v_y = \frac{dy}{dt}$, sustituyendo respectivamente en las ecuaciones anteriores, resulta: $v_x = v_o \cos\alpha$ $\quad v_y = -gt + v_o \operatorname{sen}\alpha$

$$\frac{dx}{dt} = v_o \cos\alpha \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + v_o \operatorname{sen}\alpha$$

Integrando, obtenemos: $\int dx = \int v_o \cos\alpha \, dt$ $\quad \int dy = \int (-gt + v_o \operatorname{sen}\alpha)\, dt$

$$x = v_o \cos\alpha \cdot t + C \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_o \operatorname{sen}\alpha \cdot t + C$$

Si $\boldsymbol{t = 0}$, $\boldsymbol{x = 0}$ y $\boldsymbol{y = 0}$, tenemos:

$$x = v_o \cos\alpha \cdot t + C \qquad y = -\frac{9t^2}{2} + v_o \operatorname{sen}\alpha \cdot t + C$$

$$0 = v_o \cos\alpha\,(0) + C \qquad 0 = -\frac{9(0)^2}{2} + v_o \operatorname{sen}\alpha\,(0) + C$$

De donde: $\boldsymbol{C = 0}$ $\quad \boldsymbol{C = 0}$

Por tanto, las ecuaciones resultantes son:

① $\boldsymbol{x = v_o \cos\alpha \cdot t}$ $\quad$ ② $\boldsymbol{y = -1/2\, gt^2 + v_o \cos\alpha \cdot t}$

Despejamos t en ① y resulta: $x = v_o \cos\alpha \cdot t$

$$\boldsymbol{t = \frac{x}{v_o \cos\alpha}}$$

Sustituyendo en ②, tenemos:

$$y = -1/2\, gt + v_o \operatorname{sen}\alpha \cdot t$$

$$y = -1/2\, g\left(\frac{x}{v_o \cos\alpha}\right)^2 + v_o \operatorname{sen}\alpha \left(\frac{x}{v_o \cos\alpha}\right)$$

$$y = -1/2\, g\left(\frac{x^2}{v_o^2 \cos^2\alpha}\right) + x\frac{v_o \operatorname{sen}\alpha}{v_o \cos\alpha} \qquad \boldsymbol{y = -\frac{gx^2}{2v_o^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha} \quad ③$$

La ecuación resultante representa una parábola y es la ecuación de la trayectoria del proyectil.

Sustituimos los datos del problema dado en la ecuación (3), y resulta:

$$y = -\frac{gx}{2v_o^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha$$

$$y = -\frac{(9.8)(147)^2}{2(49)^2 \cos^2 45°} + (147) \operatorname{tg} 45°$$

$$y = -\frac{(9.8)(21\,609)}{2(2\,401)(0.5)} + (147)(1)$$

$$y = -\frac{211\,768.2}{2401} + 147 = -88.2 + 147$$

$$y = 58.8 \text{ metros}$$

∴ La altura del impacto del proyectil en la pared es de 58.8 metros.

EJERCICIO XX

I. Las siguientes expresiones se han obtenido derivando ciertas funciones. En cada caso, hállese la función para los valores dados de la variable y de la función.

	DF	VV	VCF	Solución
1.	$\frac{dy}{dx} = x - 3$	$x = 2$	$y = 9$	$y = \frac{x^2}{2} - 3x + 13$
2.	$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$	$x = 1$	$y = 12$	$y = x^3 - x^2 + 5x + 7$
3.	$\frac{dx}{dy} = y^3 - 4y$	$y = 2$	$x = 0$	$x = \frac{y^4}{4} - 2y^2 + 4$
4.	$\frac{ds}{dt} = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$	$t = 4$	$s = 0$	$s = \frac{2t^{3/2}}{3} + 2\sqrt{t} - \frac{28}{3}$
5.	$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} x - \csc^2 x$	$x = \pi/2$	$y = 3$	$y = \ln \operatorname{sen} x + \operatorname{ctg} x + 3$
6.	$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \operatorname{tg} x$	$x = 0°$	$y = 5$	$y = \operatorname{tg} x - \ln \cos x + 5$
7.	$\frac{dy}{dz} = 3 + z - 5z^2$	$z = 6$	$y = -20$	$y = 304 + 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3}$
8.	$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2-t}$	$t = 1$	$s = 0$	$s = \ln\left(2t - t^2\right)$

9. $\frac{dy}{dx} = x^3 - b^2 x$ $\quad x = 2 \quad y = 0 \quad y = \frac{x^4}{4} - b^2\left(\frac{x^2+4}{2}\right) - 4$

10. $\frac{dz}{dy} = 5y^3 + 2y + 4$ $\quad y = 2 \quad z = 10 \quad z = \frac{5y^4}{4} + y^2 + 4y - 22$

II. Hallar la ecuación de la familia de curvas en que la pendiente de la tangente en un punto cualquiera tiene el valor que se indica.

Pendiente y punto	**Solución**
1. $\frac{dy}{dx} = x$	$y = \frac{x^2}{2} + C$ (parábolas)
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$	$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3}$ (parábolas semicúbicas)
3. $\frac{dy}{dx} = 3x^2$	$y = x^3 + C$ (parábolas cúbicas)
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$	$y^2 - x^2 = C$ (hipérbolas equiláteras)
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$	$a^2y^2 - b^2x^2 = C$ (hipérbolas)
6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$	$a^2y^2 + b^2x^2 = C$ (elipses)
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{1-y}$	$x^2 + y^2 + 2x - 2y = C$ (circunferencias)
8. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$	$x^2 + y^2 = 2C$ (circunferencias)

III. En cada uno de los siguientes problemas, hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es la función dada de las coordenadas, y que pasa por el punto particular indicado.

Pendiente y punto	**Solución**
1. $\frac{dy}{dx} = x;\ A(1,1)$	$2y = x^2 + 1$
2. $\frac{dy}{dx} = -xy;\ A(v,2)$	$y = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{h-x}{y-x};\ B(0,0)$	$x^2 + y^2 - 2hx - 2hy = 0$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$; $B(1, 1)$ $\qquad x \ln y = -1 + x$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{4xy}{4x^2 - 15}$; $C(2,1)$ $\qquad 4x^2 - y^2 = 15$

6. $\frac{dy}{dx} = 2xy$; $C(3, 1)$ $\qquad \ln y = x^2 - 9$

7. $\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x}$; $A(4, 1)$ $\qquad 3 \ln y = 2\left(x\sqrt{x} - 8\right)$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y+1}$; $B(0,1)$ $\qquad (y+1)^2 = (x+1) + 3$

IV. Resolver los siguientes problemas.

1. Se dan $dy = \cos 2x\, dx$, $y = 6$ cuando $x = \pi/2$. Hallar el valor de y cuando $x = 3\pi/4$.
2. Se dan $ds = t\sqrt{1 + 4t\, dt}$, $s = 0$ cuando $t = 0$. Hallar el valor de s cuando $t = 2$.
3. Se dan $dy = x\sqrt{100 - x^2}\ dx$, $y = 0$ cuando $x = 0$. Hallar el valor de y cuando $x = 8$.
4. Se dan $dy = (1 + 2x)\, dx$, $y = 7$ cuando $x = 1$. Hallar el valor de y cuando $x = 3$.
5. Se dan $dA = \sqrt{2px}\, dx$, $A = \frac{p^2}{3}$ cuando $x = \frac{p}{2}$. Hallar el valor de A cuando $x = 2$p.
6. En cada punto de cierta curva es $y = \frac{12}{x^3}$. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto $B(1, 0)$ y es tangente en ese punto a la recta $6x + y = 6$.
7. En cada punto de cierta curva es $y = \frac{1}{x}$. La curva pasa por el punto $A(1, 0)$ con inclinación de 135°. Hallar su ecuación.
8. En cada punto de cierta curva es $y = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto $C(1, 1)$ y tiene una inclinación de 45° en dicho punto.
9. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, y que pasa por el punto $A(3, 4)$.
10. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = 2x$, y que pasa por el punto $C(1, 4)$.
11. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + 4}$, y que pasa por el punto $B(1, 2)$.
12. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = x \cos^2 y$, y que pasa por el punto $A(4, \pi/4)$.

13. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2+x}{3+y}}$, y que pasa por el punto E (2, 6).

14. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$, y que pasa por el punto D (1, 9).

15. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$, y que pasa por el punto A (1, 4).

V. Resolver los siguientes problemas, aplicando el significado físico de la constante de integración:

1. Dada la relación $v = t^2 + \frac{1}{t^2}$, hallar la relación s y t, si $s = 8$ cuando $t = 4$.
2. Dada la relación $v = \sqrt{t-1}$, hallar la relación s y t, si $s = 4$ cuando $t = 2$.
3. La aceleración está expresada por $a = \frac{1}{t^2}$. Hallar la relación entre v y t, si $v = 4$ cuando $t = 6$.
4. La aceleración está expresada por $a = 3t\sqrt{t}$. Hallar la relación entre v y t, si $v = 6$ cuando $t = 9$.
5. La aceleración está expresada por $a = -16 \cos 2t$. Hallar la relación entre s y t, si $s = 1$ y $v = 30$ cuando $t = 1$.
6. La aceleración está expresada por $a = 4 - t$. Hallar la relación entre s y t, si $s = 2$ y $v = 40$ cuando $t = 2$.
7. ¿Con qué velocidad dará una piedra en el suelo si se deja caer desde lo alto de un edificio de 40 metros de altura?
8. Una piedra se dejó caer desde un globo que ascendía a la velocidad de 5 m/s. La piedra llegó al suelo en 8 segundos. ¿Qué altura tenía el globo cuando se dejó caer la piedra?
9. Una pelota se lanza del suelo hacia arriba. En un segundo llega hasta una altura de 25 metros. ¿Cuál será la máxima altura alcanzada?
10. Un cuerpo que se desliza hacia abajo sobre cierto plano inclinado está sujeto a una aceleración de 1.2 m/s². Si se pone en movimiento hacia arriba en el plano con velocidad de 1.8 m/s. Hallar:

a) La distancia a que llegará en t segundos.

b) La distancia a que llegará antes de deslizarse hacia atrás.

11. En un cuarto a la temperatura de 20° se observa que un líquido tiene una temperatura de 70°; después de 5 minutos, de 60°. Suponiendo que la rapidez de enfriamiento sea proporcional a la diferencia de las temperaturas del líquido y del cuarto, hallar la temperatura del líquido 30 minutos después de la primera observación.

12. Un cuerpo que se lanza desde lo alto de una torre, con un ángulo de 45° arriba del plano horizontal, cae al suelo en 5 segundos, en un punto cuya distancia horizontal del pie de la torre es igual a la altura de ésta. Hallar la altura de la torre.

13. Un móvil parte del origen de coordenadas y después de t segundos la componente x de su velocidad es $t^2 - 4$ y la componente y es $4t$.

a) Hallar la posición del móvil después de t segundos.

b) Hallar la distancia recorrida en la trayectoria.

c) Hallar la ecuación de la trayectoria.

14. Un proyectil se dispara contra una pared vertical situada a una distancia de 380 metros. La velocidad inicial es de 95 m/s.

a) Si $\alpha = 45°$, hallar la altura del impacto del proyectil en la pared.

b) Hallar α de manera que el impacto del proyectil esté en la base de la pared.

c) Hallar α de manera que el proyectil dé en la pared a la altura de 47.5 metros.

d) Hallar α para la máxima altura del impacto en la pared y calcular esa altura.

15. Una partícula se mueve en el plano xy de manera que las componentes de la velocidad paralelas al eje de las X y al eje de las Y son, respectivamente, k_y y k_x. Demostrar que la trayectoria es una hipérbola equilátera.

4.2 CÁLCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Diferencial del área bajo una curva

Sea la función $\phi(x)$ y sea $y = \phi(x)$ la ecuación de la curva AB.

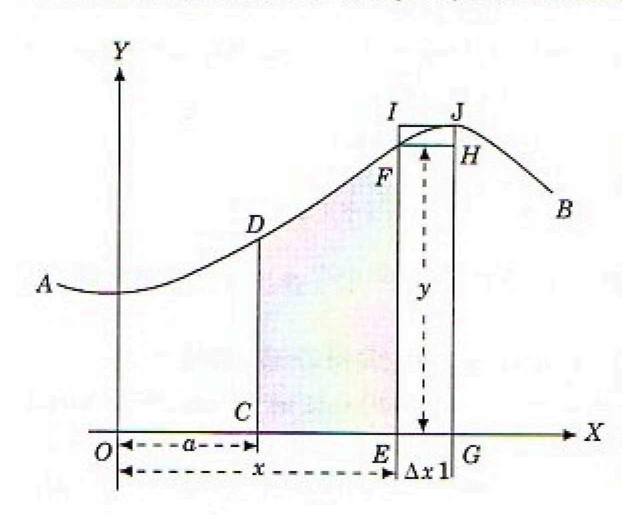


Figura 1

Con base en la Figura 1, sea CD la ordenada fija, EF la ordenada variable y A la medida del área $CEFD$. Cuando x toma un incre-mento pequeño Δx, A toma un incremento ΔA (= $EGJF$).

Completando los rectángulos $EGHF$ y $EGJI$, observamos que:

área $EGHF$ < **área** $EGJF$ < **área** $EGJI$,

es decir, $EF(\Delta x) < \Delta A < GJ(\Delta x)$; y dividiendo entre Δx, resulta:

$$EF < \frac{\Delta A}{\Delta x} < GJ$$

Si Δx 0, entonces, puesto que EF queda fija y GJ tiende hacia EF como límite (dado que y es una función continua de x), tenemos que:

$$\frac{dA}{dx} = y\,(= EF)$$

Empleando diferenciales, resulta: $dA = y\,dx$.

Teorema sobre la diferencial del área bajo una curva

La diferencial del área limitada por una curva cualquiera, el eje de las X, una ordenada fija y una ordenada variable es igual al producto de la ordenada variable por la diferencial de la abscisa correspondiente.

La integral definida

Del teorema anterior se sigue que si la curva AB es el lugar geométrico de $y = \phi(x)$, entonces $dA = y\,dx$, es decir, $dA = \phi(x)\,dx$, siendo dA la diferencial del área entre la curva, el eje de las X y dos ordenadas.

Integrando, tenemos: $\int dA = \int \phi(x)\,dx$

$$A = \int (x) + C$$

Para determinar el valor de la constante de integración C, hacemos notar que $A = 0$ cuando $x = a$. Sustituyendo estos valores en la integral obtenida, resulta:

$$A = \int (x) + C$$

$$0 = \int (a) + C, \text{ de donde } \boldsymbol{C = -f(a)}$$

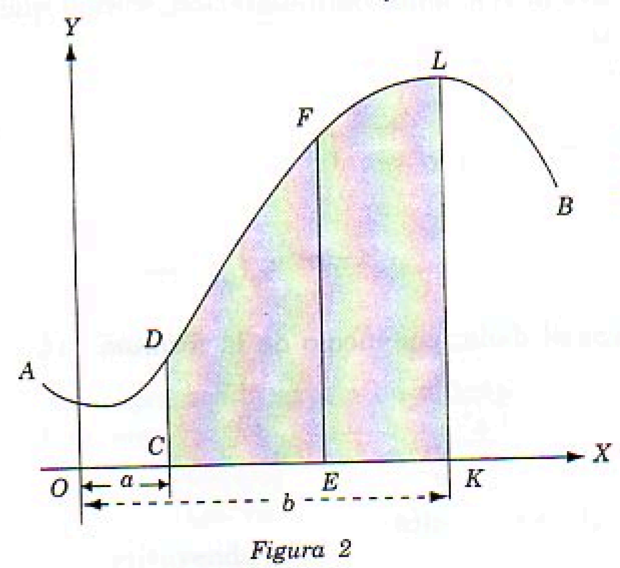


Figura 2

Por tanto, tenemos:

$$\boldsymbol{A = f(x) - f(a)}$$

Con base en la *Figura 2*, tenemos que el área $CKLD$, cuando $x = b$ es: **área *CKLD* =** $\boldsymbol{f(b) - f(a)}$

Teorema sobre la integral definida

La diferencia de los valores de $\int y\,dx$ para $x = a$ y $x = b$ da el área limitada por la curva cuya ordenada es y, el eje de las X y las ordenadas que corresponden a $x = a$ y $x = b$. Simbólicamente se expresa:

$\int_a^b \boldsymbol{y\,dx}$, que se lee: **la integral desde a hasta b de $y\,dx$.**

La operación anterior se denomina *integración entre límites*; donde a es el límite inferior y b es el límite superior.

Por tanto, la expresión $\int_a^b y\,dx$ se llama *integral definida.*

Cálculo de una integral definida

Pasos para su solución:

1. Integrar la expresión diferencial dada.
2. Reemplazar la variable en esta integral indefinida, en primer lugar por el límite superior, después por el inferior y restar el segundo resultado del primero; es decir:

$$\therefore \int_a^b y\,dx = [f(x)]_a^b = [f(b)+C]-[f(a)+C] = f(b)-f(a)$$

No es necesario tomar en cuenta la constante de integración, puesto que siempre desaparece en la sustracción.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int_2^5 x^3 dx$.

Solución

Integramos la expresión diferencial dada, por medio de la fórmula [4], y tenemos:

$$\int_2^5 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^5$$

Sustituyendo la variable por los límites, resulta:

$$\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^5 = \frac{(5)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{16}{4} = 152.25$$

$$\therefore \int_2^5 x^3 dx = \mathbf{152.25}$$

2. Hallar la $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Solución

Integrando la expresión diferencial dada, por medio de la fórmula [5], tenemos:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^e$$

Sustituimos la variable por los límites, y resulta: $[\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

$$\therefore \int_1^e \frac{dx}{x} = 1$$

3. Hallar la $\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Solución

Integrando la expresión diferencial dada, por medio de la fórmula [20], y tenemos:

$$\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[r \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r}\right]_0^r$$

Sustituyendo la variable por los límites, resulta:

$$\left[r \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r}\right]_0^r = r \operatorname{arc\,sen} \frac{r}{r} - r \operatorname{arc\,sen} \frac{0}{r} = r\,(90°) - 4(0°) = \frac{r\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\pi}{2}$$

4. Hallar la $\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta$.

Solución

Integramos la expresión diferencial dada, por medio de la fórmula [9], y tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = [\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2}$$

Sustituyendo la variable por los límites, resulta:

$$[\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\pi/2 - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 1$$

5. Hallar la $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta\, d\theta$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \sec^n u\, du$, en donde $n = 4$, lo que satisface la condición del caso V (integración de potencias de la función secante o cosecante).

Factorizando el integrando, tenemos: $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \sec^2\theta\, d\theta$

Aplicamos la identidad **sec² θ = 1 + tg² θ**, y resulta:

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \sec^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right) d\theta$$

Multiplicando, tenemos:

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right) d\theta = \underbrace{\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \, d\theta}_{①} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2\theta \sec^2\theta \, d\theta}_{②}$$

Aplicamos en ① y ②, respectivamente, las fórmulas [10] y [14], y resulta:

$$\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \, d\theta = \left[\operatorname{tg}\theta + \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/4}$$

Sustituyendo la variable por los límites, resulta:

$$\left[\operatorname{tg}\theta + \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/4} = \left(\operatorname{tg}\pi/4 + \frac{\operatorname{tg}^3\pi/4}{3}\right) - \left(\operatorname{tg}0 + \frac{\operatorname{tg}^3 0}{3}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{3}\right) - (0+0) = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \, d\theta = \frac{4}{3}$$

Cambio de límites correspondiente a un cambio de la variable

Cuando se integra por sustitución de una variable (método de integración por racionalización), a veces es algo laborioso retransformar el resultado en función de la variable primitiva. Sin embargo, cuando integramos entre límites podemos evitar el procedimiento de reponer la variable primitiva, cambiando los límites de tal manera que correspondan a la nueva variable.

EJEMPLOS

1. Hallar la $\int_0^{16} \frac{x^{1/2}dx}{1+x^{3/4}}$.

Solución

Como $n = 4$, sea $x = z^4$; entonces $x^{1/2} = z^2$, $x^{3/4} = z^3$ y $dx = 4z^3\,dz$. Para cambiar los límites, notamos que cuando: $x = 0$, $z = 0$, y cuando $x = 16$, $z = 2$.

Por lo anterior, tenemos: $\int_0^{16} \frac{x^{1/2}dx}{1+x^{3/4}} = \int_0^{2} \frac{z^2\left(4z^3dz\right)}{1+z^3} = 4\int_0^{2} \frac{z^5dz}{1+z^3}$

Al dividir, resulta:

$$\begin{array}{r|l} & z^2 \\ 1+z^3 & z^5 \\ & -z^5-z^2 \\ \hline & -z^2 \end{array} \qquad \therefore\ z^2-\frac{z^2}{1+z^3}$$

Ahora tenemos:

$$4\int_0^2 \frac{z^5dz}{1+z^3} = 4\int_0^2\left(z^2-\frac{z^2}{1+z^3}\right)dz = 4\int_0^2 z^2dz - 4\int_0^2 \frac{z^2\,dz}{1+z^3}$$

① ②

En las integrales ①y②, aplicamos respectivamente las fórmulas [4] y [5], resultando:

$$4\int_0^2 z^2dz - 4\int_0^2 \frac{z^2dz}{1+z^3} = \left[\frac{4z^3}{3}-\frac{4}{3}\ln\left(1+z^3\right)\right]_0^2$$

Sustituimos la variable por los límites, resulta:

$$\left[\frac{4z^3}{3}-\frac{4}{3}\ln\left(1+z^3\right)\right]_0^2 = \left[\frac{4(2)^3}{3}-\frac{4}{3}\ln\left[1+(2)^3\right]\right]-\left[\frac{4(0)^2}{3}-\frac{4}{3}\ln\left[1+(0)^3\right]\right]$$

$$=\left(\frac{32}{3}-\frac{4}{3}\ln 9\right)-\left(0-\frac{4}{3}\ln 1\right)\approx \mathbf{7.7370}$$

$$\therefore \int_0^{16}\frac{x^{1/2}dx}{1+x^{3/4}} = 7.7370$$

2. Hallar la $\int_3^{29}\frac{(x-2)^{2/3}\,dx}{(x-2)^{2/3}+3}$.

Solución

Como n=3, sea $x-2=z^3$; entonces $(x-2)^{2/3}=z^2$ y $dx=3z^2\,dz$. Para cambiar los límites, notamos que cuando: x= 3, z = 1, y cuando x = 29, z = 3.

Por lo anterior, tenemos: $\int_3^{29}\frac{(x-2)^{2/3}\,dx}{(x-2)^{2/3}+3} = \int_1^3 \frac{z^2\left(3z^2dz\right)}{z^2+3} = 3\int_1^3\frac{z^4dz}{z^2+3}$

Al dividir, resulta:

$$\begin{array}{r|l} & z^2-3 \\ z^2+3 & z^4 \\ & -z^4-3z^2 \\ \hline & -3z^2 \\ & 3z^2+9 \\ \hline & 9 \end{array} \qquad \therefore\ z^2-3+\frac{9}{z^2+3}$$

Ahora tenemos que:

$$3\int_1^3 \frac{z^4dz}{z^2+3} = 3\int_1^3\left(z^2-3+\frac{9}{z^2+3}\right)dz = 3\int_1^3 z^2dz - 9\int_1^3 dz + 27\int_1^3 \frac{dz}{z^2+3}$$

① ② ③

En las integrales ①, ② y ③ aplicamos respectivamente las fórmulas [4], [1] y [18], resultando.

$$3\int_1^3 z^2dz - 9\int_1^3 dz + 27\int_1^3 \frac{dz}{z^2+3} = \left[z^3 - 9z + \frac{27}{\sqrt{3}}\ \text{arc tg}\ \frac{z}{\sqrt{3}}\right]_1^3$$

Sustituyendo la variable por los límites, resulta:

$$\left[z^3 - 9z + \frac{27}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{z}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \left[(3)^3 - 9(3) + \frac{27}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{3}{\sqrt{3}}\right] - \left[(1)^3 - 9(1) + \frac{27}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\left[z^3 - 9z + \frac{27}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{z}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \left[27 - 27 + \frac{27}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}}\pi - 1 + 9 - \frac{9}{2\sqrt{3}}\pi = 8 + \frac{9}{2\sqrt{3}}\pi = 8 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$= \mathbf{16.16209714}$$

$$\therefore \int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}dx}{(x-2)^{2/3}+3} \approx \mathbf{16.16209714}$$

EJERCICIO XXI

I. Comprobar las siguientes integrales definidas.

1. $\int_1^4 z^4\,dz = 21$

2. $\int_0^{\pi} \text{sen}\ y\,dy = 2$

3. $\int_0^a \frac{dy}{a^2+v^2} = \frac{\pi}{4a}$

4. $\int_0^a \left(a^2x - x^3\right)dx = \frac{a^4}{4}$

5. $\int_0^a \frac{dx}{9-4x^2} = 0.1341$

6. $\int_0^a \frac{dx}{e^{3x}} = 0.3167$

7. $\int_3^{11} \sqrt{2t+3}\, dt = 32.6666$

8. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\theta}{\text{sen } 2\theta} = 0.5493$

9. $\int_0^{2\pi} \text{sen} \frac{\theta}{2}\, d\theta = 4$

10. $\int_{-1}^{1} \left(2t^2 - t^3\right) dt = \frac{4}{3}$

11. $\int_1^4 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2$

12. $\int_0^2 \frac{t^3 dt}{1+t} = 1.5680$

13. $\int_0^a \left(\sqrt{a} - \sqrt{z}\right)^2 dz = \frac{a^2}{6}$

14. $\int_0^4 \frac{v^2\, dv}{1+v} = 5.6094$

15. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \,\text{sen}^3 \theta\, d\theta = \frac{1}{12}$

16. $\int_1^e \ln x\, dx = 1$

17. $\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos x}\, dx = 4$

18. $\int_0^1 \frac{d\,\theta}{e^{3\theta}} = 0.3167$

19. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = 0.7320$

20. $\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = -0.8813$

21. $\int_2^3 \frac{2x\, dx}{1+x^2} = 0.6931$

22. $\int_{-2}^{2} \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{4}\pi$

23. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{dx}{\csc x} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

24. $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{e^{x/2}} = 4.9904$

II. Comprobar las siguientes integrales definidas por medio del cambio de límites correspondiente a un cambio de la variable.

1. $\int_0^{16} \frac{t^{1/4} dt}{1+t^{1/2}} = \frac{8}{3} + 4 \text{ arc tg } 2$

2. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 1.8027$

3. $\int_1^4 \frac{x\, dx}{\sqrt{2+4x}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{2x}\left(9+\sqrt[3]{2x}\right)} = 3 - 9 \text{ arc tg} \frac{1}{3}$

5. $\int_0^3 \frac{dy}{(y+2)\sqrt{1+y}} = 2 \text{ arc tg } 2 - \frac{\pi}{2}$

6. $\int_1^{64} \frac{dx}{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 5.31$

7. $\int_0^1 \frac{t^{3/2}\, dt}{t+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$

8. $\int_8^{27} \frac{dx}{x - x^{1/3}} = 1.4712$

III. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales definidas.

1. $\int_1^3 \sqrt{3x+1}\,dx$

2. $\int_0^1 t\left(1-\sqrt{t}\right)^2 dt$

3. $\int_0^3 \frac{dz}{\sqrt{z+1}}$

4. $\int_4^8 \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-15}}$

5. $\int_0^a \sqrt{a^2-v^2}\,dv$

6. $\int_{-1}^2 x\left(1-x^2\right)dx$

7. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{3+\cos 2\theta}$

8. $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$

9. $\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\operatorname{tg}\theta+2}$

10. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{25-4x^2}}$

11. $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+16}}$

12. $\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{9-2t}}$

13. $\int_0^2 (2+t)\,dt$

14. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\theta-1}{\cos 2\theta+1}\,d\theta$

15. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\operatorname{sen} z\,dz}{\cos^2 z-5\cos z+4}$

16. $\int_0^{\pi/3} x^2 \operatorname{sen} 3x\,dx$

17. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{e^{x^2}}$

18. $\int_1^5 \frac{dt}{\sqrt{2t-1}}$

19. $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$

20. $\int_1^{64} \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

21. $\int_4^5 x^2\sqrt{x-4}\,dx$

22. $\int_1^2 \frac{t\,dt}{\sqrt{5-t}}$

23. $\int_{-1}^1 \frac{\left(x^3-6x^2+12x+5\right)dx}{(x-2)^3}$

24. $\int_{-2}^2 \frac{x\,dx}{x-3}$

25. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

26. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

27. $\int_0^1 \frac{z^2 dx}{1+z^2}$

28. $\int_{-1}^2 \frac{t^2 dt}{2+t}$

29. $\int_{-5}^5 2x\sqrt[3]{x^2+2}\,dx$

30. $\int_{-3}^3 \left(x^6-3x\right)dx$

31. $\int_{-3}^2 \frac{\left(3x^3-24x^2+48x+5\right)dx}{x^2-8x+16}$

32. $\int_1^2 \frac{\left(x^3+2x^2+x+2\right)dx}{(x+1)^2}$

33. $\int_0^{15} \frac{x\,dx}{(x+1)^{3/4}}$

34. $\int_1^3 \frac{x\,dx}{\left(3x^2-1\right)^3}$

35. $\int_{-2}^0 3t\sqrt{4-t^2}\,dt$

36. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

4.3 CÁLCULO DEL ÁREA BAJO UNA CURVA DADA

Para determinar el área de una curva con respecto al eje X y las ordenadas $x = a$ y $x = b$, se utiliza la fórmula: **Área** $= \int_a^b y\,dx$

Se sustituye el valor de y en términos de x según se obtiene de la ecuación de la curva dada.

Para determinar el área de una curva con respecto al eje Y y las abscisas $y = a$ y $y = b$, se utiliza la fórmula: **Área** $= \int_a^b x\,dy$

Se sustituye el valor de x en términos de y según se obtiene de la ecuación de la curva dada.

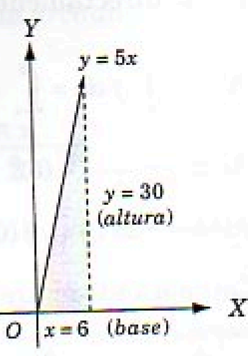
EJEMPLOS

1. Calcular por integración el área del triángulo limitado por la recta $y = 5x$, el eje de las X y la ordenada $x = 6$. Comprobar el resultado, determinando el área como la mitad del producto de la base por la altura.

Solución

Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicando directamente la fórmula [4], resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^6 5x\,dx = \left.\frac{5x^2}{2}\right]_a^b = \frac{5(6)^2}{2} - \frac{5(0)^2}{2} = \mathbf{90}$$

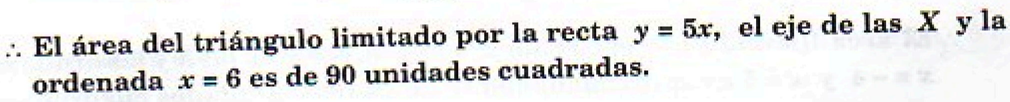


Nota: A partir de aquí dejaremos sólo el corchete de la derecha, para indicar los límites.

Para su comprobación tenemos, gráficamente:

Aplicando la fórmula: **Área** $= \dfrac{\textbf{(base)(altura)}}{\mathbf{2}}$

Si sustituimos los datos, y resulta:

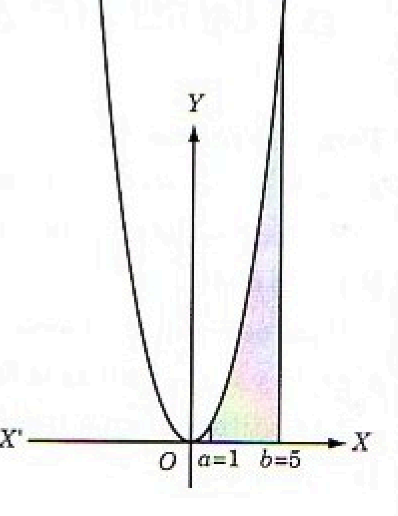


$$\text{Área} = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2} = \frac{(6)(30)}{2} = \mathbf{90}_{\ L.C.D.D.}$$

∴ El área del triángulo limitado por la recta $y = 5x$, el eje de las X y la ordenada $x = 6$ es de 90 unidades cuadradas.

2. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de las X y las ordenadas $x = 1$ y $x = 5$.

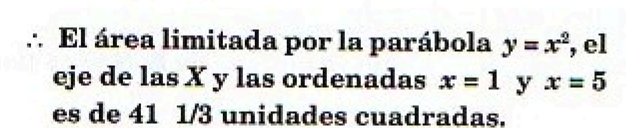
Solución



Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicando directamente la fórmula [4], resulta:

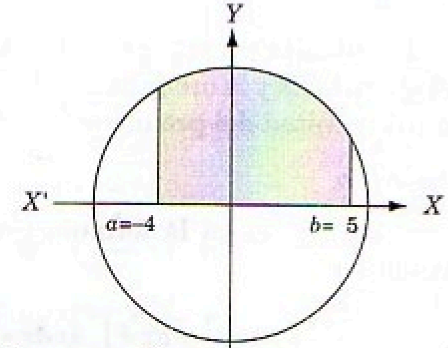
$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_1^5 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^5$$

$$\text{Área} = \frac{(5)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \mathbf{41\ 1/3}$$


∴ **El área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de las X y las ordenadas $x = 1$ y $x = 5$ es de 41 1/3 unidades cuadradas.**

3. Hallar el área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 36$, el eje de las X y las ordenadas $x = -4$ y $x = 5$.

Solución



Despejando y de la ecuación dada, tenemos: $y = \sqrt{36 - x^2}$

Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicando directamente la fórmula [23], resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_{-4}^5 \sqrt{36 - x^2}\,dx = \left.\frac{x}{2}\sqrt{36 - x^2} + \frac{36}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{x}{6}\right]_{-4}^5$$

$$\text{Área} = \frac{5}{2}\sqrt{36 - (5)^2} + 18\,\text{arc sen}\,\frac{5}{6} - \frac{(-4)}{2}\sqrt{36 - (-4)^2} - 18\,\text{arc sen}\,\frac{-4}{6}$$

$$\text{Área} \approx 8.2915 + 18\,(0.9851) + 8.9442 - 18(-0.7297) \approx \mathbf{48.1025}$$

Comparando el área del semicírculo, tenemos:

$$\textbf{Área del semicírculo} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{(3.1416)(36)}{2} \approx \mathbf{56.486}$$

Obsérvese que el área encontrada es menor que la del semicírculo, razón por la cual nuestros cálculos son correctos.

∴ **El área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 36$, el eje de las X y las ordenadas $x = -4$ y $x = 5$ es aproximadamente de 48.1025 unidades cuadradas.**

4. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $xy = k^2$, el eje de las X y las ordenadas $x = a$ y $x = b$.

Solución

Despejamos y en la ecuación dada, y tenemos: $y = \frac{k^2}{x}$

Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicando directamente la fórmula [5], resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b \frac{k^2}{x}\,dx = \left[k^2 \ln x\right]_a^b = k^2 \ln b - k^2 \ln a = k^2(\ln b - \ln a) = k^2 \ln \frac{b}{a}$$

∴ El área de la superficie limitada por la curva $xy = k^2$, el eje de las X y las ordenadas $x = a$ y $x = b$ es de $k^2 \ln \frac{b}{a}$ unidades cuadradas.

5. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje de las Y y las rectas $y = 0$ y $y = 4$.

Solución

Despejamos x de la ecuación dada, y tenemos: $x = \frac{y^2}{4}$

Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b x\,dy$ aplicando directamente la fórmula [4], resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b x\,dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4}\,dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{(4)^3}{12} - \frac{(0)^3}{12} = 5\ 1/3$$

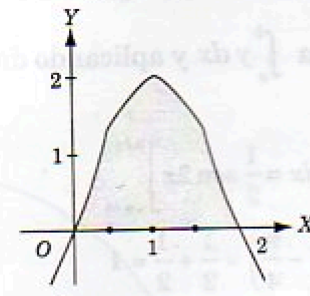
∴ El área de la superficie limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje de las Y y las rectas $y = 0$ y $y = 4$ es de 5 1/3 unidades cuadradas.

6. *Bosquejar* la curva $y = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$ y hallar el área de una *arcada*.

Solución

Primeramente trazamos los rasgos de la curva $y = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$, así:

x	y
0	0
0.5	1.4142
1	2
1.5	1.4142
2	0



En la gráfica observamos que los límites de la *arcada* son $x = 0$ y $x = 2$.

Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicando directamente la fórmula [8], resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^2 2\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}\,dx = -\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big]_0^2$$

$$\text{Área} = -\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi(2)}{2} + \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi(0)}{2} = -\frac{4}{\pi}\cos\pi + \frac{4}{\pi}\cos 0 = \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} = \frac{8}{\pi}$$

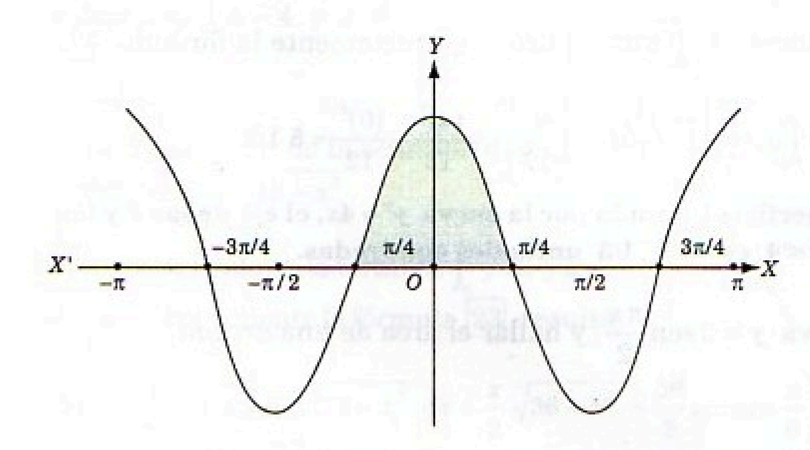
∴ **El área para una arcada de la curva $y = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$ es de $\frac{8}{\pi}$ unidades cuadradas.**

7. *Bosquejar* la curva $y = \cos 2x$ y hallar el área de una *arcada*.

Solución

Primeramente trazamos los rasgos de la curva $y = \cos 2x$.

x	0	π/4	π/2	3π/4	π	−π/4	−π/2	−3π/4	−π
y	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1



En la gráfica, observamos que los límites de la *arcada* son: $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$

Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicando directamente la fórmula [9], resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \mathbf{1}$$

∴ **El área para una arcada de la curva $y = \cos 2x$ es de 1 unidad de superficie.**

Cálculo del área cuando las ecuaciones de la curva se dan en forma paramétrica

Por lo general, las coordenadas x y y de un punto en una curva se expresan como funciones de una tercera variable, por ejemplo t, a la que se le denomina *parámetro*. Las ecuaciones de la curva $x = f(t)$ y $y = \phi(t)$ expresadas en forma paramétrica, en donde cada valor de t da un valor de x y un valor de y, dan lugar a un punto de la curva.

Por lo anterior tenemos: $x = f(t)$ $\qquad y = \phi(t)$

$$dx = f'(t)dt$$

Entonces tenemos: $\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\,f'(t)\,dt$

Obsérvese que: $t = t_1$ cuando $x = a$, y $t = t_2$ cuando $x = b$.

EJEMPLOS

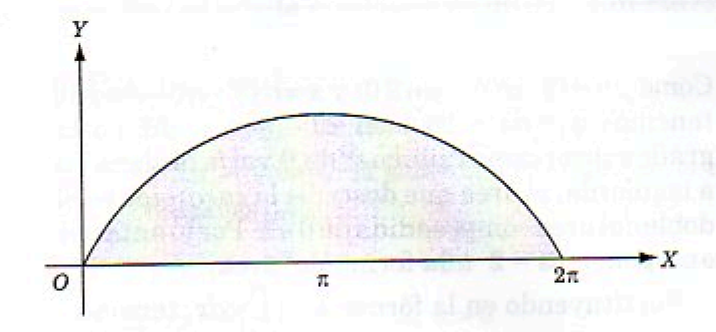
1. Hallar el área de la superficie limitada por una *arcada* de la *cicloide* $x = a\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a\,(1 - \cos\theta)$ y el eje de las X.

Solución

Primero trazamos los rasgos de la *cicloide*:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
x	0	0.0235	0.0782	0.1811	0.5707	1.2283	1.6490	2.1179	3.1416	4.1651	4.6340	5.0547	5.7123	6.1019	6.2048	6.2595	6.2832
y	0	0.1340	0.2929	0.5	1	1.5	1.7071	1.8660	2	1.8660	1.7071	1.5	1	0.5	0.2929	0.1340	0

Nota: Para tabular y hacer la gráfica, consideramos el valor de $a = 1$.



Puesto que $y = a\,(1-\cos\theta)$ y $x = a\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$, tenemos que $dx = a\,(1-\cos\theta)\,d\theta$; en la gráfica observamos que los límites de la *arcada* son $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b y\,dx$, tenemos:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\,a(1-\cos\theta)\,d\theta = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$\text{Área} = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}d\theta - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta + a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta$$

① ② ③

En las integrales ①, ② y ③ aplicamos respectivamente las fórmulas [1] y [9], así como el caso II para la integración de productos de potencias pares de senos y cosenos por medio de ángulos múltiplos; resulta:

$$a^2\int_0^{2\pi}d\theta - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta + a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = a^2\theta - 2a^2\operatorname{sen}\theta + \frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2\operatorname{sen}2\theta}{4}\Bigg]_0^{2\pi}$$

$$= \left[a^2(2\pi) - 2a^2\operatorname{sen}(2\pi) + \frac{a^2(2\pi)}{2} + \frac{a^2\operatorname{sen}4\pi}{4}\right] - \left[a^2(0) - 2a^2\operatorname{sen}(0) + \frac{a^2(0)}{2} + \frac{a^2\operatorname{sen}2(0)}{4}\right]$$

$$\textbf{Área} = 3a^2\pi$$

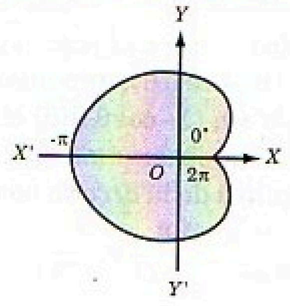
∴ **El área para una arcada de la curva *cicloide* es de $3a^2\pi$ unidades de superficie.**

2. Hallar el área de la *cardioide* $x=a\,(2\cos\theta - \cos 2\theta)$, $y=a\,(2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta)$.

Solución

Primeramente trazamos los rasgos de la *cardioide*:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
x	1	1.232	1.5	1	−0.5	−2.232	−3	−2.232	−0.5	1	1.5	1.232	1
y	0	0.134	0.866	2	2.598	−1.866	0	−1.866	−2.598	−2	−0.866	−0.134	0



Como $y = a\,(2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta)$ y $x = a\,(2\cos\theta - \cos 2\theta)$, tenemos que $dx = 2a\,(\operatorname{sen}2\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$; en la gráfica observamos que cuando θ varía de derecha a izquierda, el área que describe la *cardioide* es el doble del área comprendida de 0 a π. Por lo anterior anteponemos -2 a la forma del área.

Sustituyendo en la fórmula $-2\int_a^b y\,dx$, tenemos:

$$\text{Área} = -2\int_a^b y\,dx = -2\int_0^{\pi} a\,(2\ \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta)2a(\operatorname{sen}2\theta - \operatorname{sen}\theta)d\theta$$

$$\text{Área} = \int_0^{\pi}\left(-8a^2\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta + 8a^2\operatorname{sen}^2\theta + 4a^2\operatorname{sen}^2 2\theta - 4a^2\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta\right)d\theta$$

$$\text{Área} = 12a^2\underbrace{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta}_{①} + 8a^2\underbrace{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta}_{②} + 4a^2\underbrace{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta}_{③}$$

Para resolver la integral ①, aplicaremos el método de integración de productos de funciones seno y coseno con diferentes argumentos en la misma variable (caso III); utilizando la fórmula **2** de integración directa de dicho caso, tenemos:

$$-12a^2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta = 2a^2\ \operatorname{sen}3\theta - 6a^2\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\pi}$$

Para resolver las integrales ② y ③, aplicaremos el método de integración de productos de potencias pares de senos y cosenos por medio de ángulos múltiplos (caso III); utilizando respectivamente las fórmulas trigonométricas $\mathbf{sen^2\,\theta = 1/2 - 1/2\cos 2\theta}$ y $\mathbf{sen^2 2\theta = 1/2 - 1/2\cos 4\theta}$, resulta:

$$8a^2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = 8a^2\int_0^{\pi}(1/2 - 1/2\cos 2\theta)d\theta = 4a^2\,\theta - 2a^2\operatorname{sen}2\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$4a^2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta = 4a^2\int_0^{\pi}(1/2 - 1/2\cos 4\theta)d\theta = 2a^2\,\theta - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}4\theta\Big]_0^{\pi}$$

Escribimos en forma unificada los resultados correspondientes, y tenemos:

$$\text{Área} = 2a^2\theta + 4a^2\theta - 6a^2\operatorname{sen}\theta - 2a^2\operatorname{sen}2\theta + 2a^2\ \operatorname{sen}3\theta - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}4\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$\text{Área} = \left[6a^2(\pi) - 6a^2\operatorname{sen}(\pi) - 2a^2\operatorname{sen}2(\pi) + 2a^2\operatorname{sen}3(\pi) - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}4(\pi)\right] -$$

$$\left[6a^2(0) - 6a^2\operatorname{sen}(0) - 2a^2\operatorname{sen}2(0) + 2a^2\operatorname{sen}3(0) - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}4(0)\right] = 6a^2\pi$$

∴ **El área de la cardioide es de $6a^2\pi$ unidades de la superficie.**

EJERCICIO XXII

I. Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las X y las ordenadas dadas.

1. $y = 9 - x^2;\ x = 0,\ x = 3$
2. $y = x^2 + x + 1;\ x = 2,\ x = 3$
3. $y = x^3;\ x = 0,\ x = 4$
4. $y = 2x + 3x^2 + x^3;\ x = -3,\ x = 3$

5. $y = \frac{1}{x^2} + 2x;\ x = 1,\ x = 4$

6. $y = x^2 + 4x + 5;\ x = 1,\ x = 4$

7. $y = x^3 + 1;\ x = -2,\ x = 2$

8. $y = x^2 + x - 6;\ x = 0,\ x = 4$

9. $y = x\sqrt{x+1};\ x = 0,\ x = 3$

10. $y = x + 2;\ x = -3,\ x = 4$

11. $y = x\sqrt{x^2 + 5};\ x = 0,\ x = 2$

12. $y = \frac{1}{(x+2)^3};\ x = -1,\ x = 3$

13. $y = 4x - x^2;\ x = 1,\ x = 3$

14. $y = 4x - x^2;\ x = -4,\ x = -2$

15. $y = x^4;\ x = -2,\ x = 1$

16. $y = x^3;\ x = 1,\ x = 2$

17. $y = x^2 - 2x;\ x = 2,\ x = 7$

18. $y = x^2\sqrt{x-4};\ x = 4,\ x = 5$

19. $y = \frac{1}{3 + x^2};\ x = -1,\ x = 2$

20. $y = x^2 - 2x + 3;\ x = -2,\ x = 1$

II. Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las Y y las abscisas dadas.

1. $y = 4 - x^2;\ y = 0,\ y = 3$

2. $x^2 = 4y + 16;\ y = -2,\ y = 0$

3. $x^2 = 9 - y;\ y = 0,\ y = 8$

4. $2x^2 = y^3;\ y = 0,\ y = 2$

5. $x^2 + 4y = 0;\ y = -1,\ y = 0$

6. $ax = y\sqrt{a^2 - y^2};\ y = 0,\ y = a$

7. $x = \frac{10}{\sqrt{y+4}};\ y = 0,\ y = 5$

8. $xy = k^2;\ y = a,\ y = b$

9. $x = 9y - y^3;\ y = 0,\ y = 3$

10. $xy = 8;\ y = 1,\ y = 4$

11. $y^3 = a^2x;\ y = 0,\ y = a$

12. $ay^2 = x^3;\ y = 0,\ y = a$

13. $x = \frac{1}{y^2} - y;\ y = 2,\ y = 3$

14. $x = y\sqrt{y+5};\ y = -1,\ y = 4$

15. $x = y^3;\ y = 1,\ y = 3$

16. $x = \frac{1}{\sqrt{y}};\ y = 1,\ y = 4$

17. $x = \sqrt{y^2 - 4};\ y = -5,\ y = -3$

18. $x = \ln y;\ y = 1,\ y = e$

19. $x = \frac{1}{25 - y^2};\ y = 3,\ y = 5$

20. $x = x = \sqrt{1 + 3y};\ y = 1,\ y = 8$

III. Resolver los siguientes problemas.

1. Calcular por integración el área del triángulo limitado por la recta $y = 3x$, el eje de las X y la ordenada $x = 5$. Comprobar el resultado, obteniendo el área como la mitad del producto de la base por la altura.
2. Calcular por integración el área del trapecio limitado por la recta $5x - 8y + 40 = 0$, el eje de las X y las ordenadas $x = -6$ y $x = -1$. Comprobar el resultado, obteniendo el área como la semisuma de las bases por la altura.
3. Calcular el área limitada por la parábola $y = (x - 1)^2$, el eje de las X y las ordenadas $x = 1$ y $x = 5$.
4. Calcular el área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 16$, el eje de las X y las ordenadas $x = -3$ y $x = 2$.
5. Calcular el área limitada por la elipse $3x^2 + 4y^2 = 108$, el eje de las X y las ordenadas $x = -3$ y $x = 3$.
6. Calcular el área limitada por la elipse $x^2 + 3y^2 = 6$, el eje de las X y las ordenadas $x = -2$ y $x = 2$.
7. Calcular el área limitada por la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$, el eje de las X y las ordenadas $x = 1$ y $x = 3$.
8. Calcular el área limitada por la parábola $y = x^2 + 2x$, el eje de las X y las ordenadas $x = 0$ y $x = 2$.
9. Calcular el área limitada por la parábola $y = 4 - x^2$, el eje de las X y las ordenadas $x = -1$ y $x = 1$.
10. Calcular el área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, el eje de las X y las ordenadas $x = 0$ y $x = r$.
11. Hallar el área de la superficie limitada por la *catenaria* $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, el eje de las X y las rectas $x = a$ y $x = -a$.

IV. Bosquejar cada una de las siguientes curvas y hallar el área de una arcada.

1. $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$
2. $y = 2\cos x$
3. $y = 2\cos \frac{\pi\theta}{2}$
4. $y = \operatorname{sen} 2x$
5. $y = \operatorname{tg} x \sec^2 x$
6. $y = \operatorname{sen} \theta$
7. $y = x^2 \operatorname{sen} 3x$
8. $y = \frac{1}{3 + \cos 2x}$
9. $y = \sqrt{\operatorname{sen} x + 1}\cos x$
10. $y = \cos\theta \operatorname{sen}\theta$

V. Hallar el área de las siguientes curvas; sus ecuaciones se expresan en forma paramétrica.

1. Hallar el área de la *hipocicloide* $x = a\cos^3\theta, y = a\,\text{sen}^3\theta$, donde θ es el parámetro.

2. Hallar el área de la superficie limitada por una arcada de la curva *la compañera de la cicloide* $x = a\theta$ y $y = a(1 - \cos\theta)$.

3. Hallar el área de la superficie limitada por una arcada de la *cicloide* $x = \theta - \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ y el eje de las X.

4. Hallar el área de la *cardioide*, con $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$, $y = 2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta$.

5. Hallar la $\int_3^6 xy\,dx$, donde $x = 6\cos\theta$ y $y = 2\,\text{sen}\,\theta$.

4.4 INTEGRACIÓN APROXIMADA (FÓRMULA DE LOS TRAPECIOS Y FÓRMULA DE SIMPSON)

Representación geométrica de una integral

Hasta este punto se ha presentado la integral definida como una forma para determinar el área. Lo anterior no significa que en todos los casos cualquier integral definida represente un área, puesto que la interpretación física del resultado depende siempre de la naturaleza de las magnitudes que representen las variables abscisa (x) y ordenada (y).

Si consideramos (x, y) como las coordenadas de un punto fijo, la integral $\int_a^b y\,dx$ representa realmente un área. Si suponemos que la ordenada representa la *velocidad* de un punto móvil y la abscisa corresponde al *tiempo* en que el punto tiene dicha velocidad, entonces su representación gráfica es la de una curva que describe la velocidad del movimiento, y el área bajo ella entre dos ordenadas representa la *distancia recorrida en el intervalo de tiempo limitante*.

Por lo anterior, se deduce que el valor de la integral que representa el área es igual al valor que representa la distancia; de igual manera, toda integral definida cuyo significado sea el volumen, la superficie, la masa, la fuerza, etc., puede ser representada geométricamente por un área.

Fórmula de los trapecios

La aplicación de la fórmula de los trapecios es útil cuando la integración en $\int_a^b f(x)\,dx$ es difícil o no se efectúa en términos de funciones elementales. El valor numérico exacto de $\int_b^a f(x)\,dx$ es la medida del área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de las X y las ordenadas $x = a$ y $x = b$.

El valor de esta área puede determinarse, aproximadamente, sumando trapecios, tal y como se explica en la Figura 1.

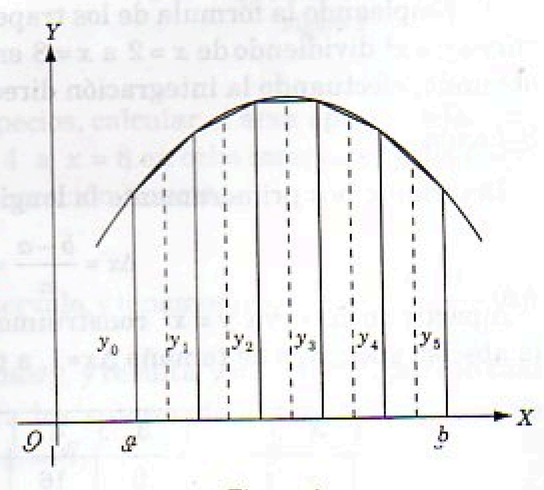


Figura 1

Divídase el segmento $b - a$ del semieje OX en n partes iguales, y sea Δx la longitud de cada parte, es decir:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sean las abscisas de los puntos de división de la función:

$$x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$$

Trazar en estos puntos las ordenadas correspondientes de la curva $y=f(x)$, y sean éstas:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ y_3 = f(x_3), \dots, y_n = f(x_n)$$

Únanse las extremidades de las ordenadas consecutivas por líneas rectas (*cuerdas*); de esta manera se formarán trapecios. Puesto que el área de un trapecio es igual a la semisuma de las bases por la altura, tenemos:

$1/2(y_0 + y_1)\Delta x$= área del primer trapecio, $1/2(y_1 + y_2)\Delta x$= área del segundo trapecio,... , $1/2(y_{n-1} + y_n)\Delta x$= área del enésimo trapecio.

Sumando, se obtiene la fórmula del área de todos los trapecios:

$$\textbf{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

Es necesario tomar en cuenta que cuanto mayor sea el número de intervalos (*cuanto más pequeño sea* Δx) tanto más se aproximará el área total de los trapecios al área bajo la curva.

EJEMPLOS

1. Empleando la fórmula de los trapecios, calcular el área aproximada de la curva $y=x^2$ dividiendo de $x=2$ a $x=8$ en seis intervalos. Comparar el resultado obtenido, efectuando la integración directa.

Solución

Determinemos primeramente la longitud de cada intervalo:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-2}{6} = 1$$

A partir de la curva $y = x^2$ construimos la siguiente tabla para los valores de la abscisa sucesivos de tamaño Δx=1, a partir de $x = 2$ a $x = 8$.

x	2	3	4	5	6	7	8
y	4	9	16	25	36	49	64

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de los trapecios, resultando:

$$\begin{matrix}\textit{Área}\\ \textit{total}\end{matrix} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\begin{matrix}\textit{Área}\\ \textit{total}\end{matrix} = \left[\frac{1}{2}(4) + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + \frac{1}{2}(64)\right](1)$$

$$\textit{Área total} = 169$$

$\therefore$ **Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada para la curva $y = x^2$ es de 169 unidades de superficie.**

Efectuando la integración directa *(aplicando la fórmula 4)*, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_2^8 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_2^8$$

$$\text{Área} = \left[\frac{(8)^3}{3}\right] - \left[\frac{(2)^3}{3}\right]$$

Área = 170 2/3 − 2 2/3 = **168**

$\therefore$ **Por integración directa, el área bajo la curva $y = x^2$ es de 168 unidades de superficie.**

Comparando los resultados (véase Figura 2) observamos que: **169 ≈ 168.**

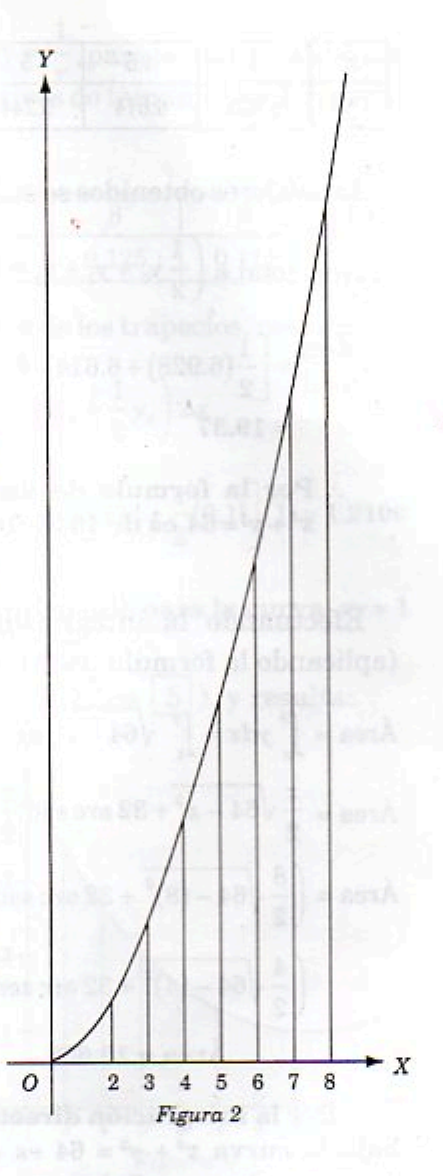


Figura 2

2. Empleando la fórmula de los trapecios, calcular el área aproximada para la curva $x^2 + y^2 = 64$, dividiendo de $x = 4$ a $x = 8$ en ocho intervalos. Comparar el resultado obtenido efectuando la integración directa.

Solución

Determinamos la longitud de cada intervalo, y tenemos: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-4}{8} = 0.5$

En la ecuación $x^2 + y^2 = 64$, despejamos *y*, y resulta $y = \sqrt{64 - x^2}$, para lo cual construiremos la siguiente tabla para los valores de abscisas sucesivos de tamaño $\Delta x = 0.5$ a partir de $x = 4$ a $x = 8$.

x	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.8	8
y	6.928	6.614	6.244	5.809	5.291	4.663	3.872	2.783	0

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de los trapecios, resultando:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\begin{aligned}\begin{matrix}Área\\total\end{matrix} &= \left[\frac{1}{2}(6.928) + 6.614 + 6.244 + 5.809 + 5.291 + 4.663 + 3.872 + 2.783 + \frac{1}{2}(0)\right](0.5)\\ &= \mathbf{19.37}\end{aligned}$$

$\therefore$ ***Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada para la curva $x^2 + y^2 = 64$ es de 19.37 unidades de superficie.***

Efectuando la integración directa (aplicando la fórmula [23]) resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_4^8 \sqrt{64 - x^2}\,dx$$

$$\text{Área} = \frac{x}{2}\sqrt{64 - x^2} + 32 \text{ arc sen } \frac{x}{8}\bigg]_4^8$$

$$\text{Área} = \left(\frac{8}{2}\sqrt{64 - (8)^2} + 32 \text{ arc sen} \frac{8}{8}\right) - \left(\frac{4}{2}\sqrt{64 - (4)^2} + 32 \text{ arc sen} \frac{4}{8}\right)$$

$$\textbf{Área = 19.653}$$

$\therefore$ **Por la integración directa, el área bajo la curva $x^2 + y^2 = 64$ es de 19.653 unidades de superficie.**

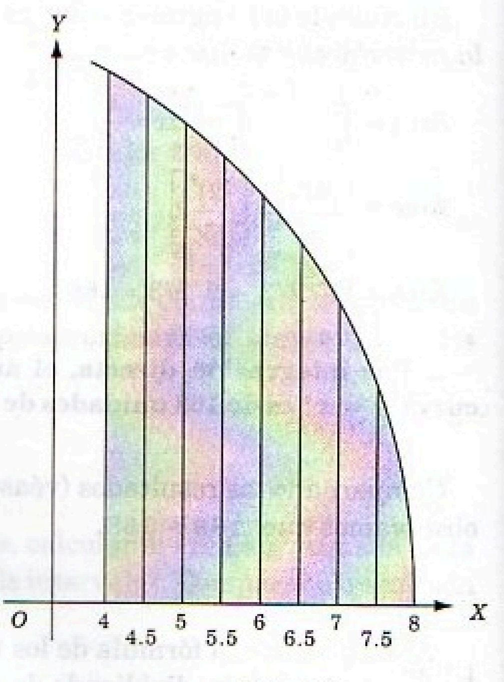


Figura 3

Comparando los resultados (véase la Figura 3), observamos que: **19.37 ≈ 19.653**

3. Empleando la fórmula de los trapecios, calcular el área aproximada para la curva $xy = 1$, dividiendo de $x = 3$ a $x = 10$ en siete intervalos. Comparar el resultado obtenido efectuando la integración directa.

Solución

Determinando la longitud de cada intervalo, tenemos: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{10-3}{7} = \mathbf{1}$

De la ecuación $xy = 1$, despejamos y, resultando $y = \frac{1}{x}$, para la cual construimos la siguiente tabla para los valores de abscisa sucesivos de tamaño $\Delta x = 1$, a partir de $x=3$ a $x=10$.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0.333	0.25	0.2	0.166	0.142	0.125	0.111	0.1

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de los trapecios, resultando:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{1}{2}(0.333) + 0.25 + 0.2 + 0.166 + 0.142 + 0.125 + 0.111 + \frac{1}{2}(0.1)\right](1) = \mathbf{1.2100}$$

∴ Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada para la curva $xy = 1$ es de 1.2100 unidades de superficie.

Efectuamos la integración directa (aplicando la fórmula [5]), y resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_3^{10} \frac{dx}{x} = \ln x\Big]_3^{10}$$

Área = ln 10 − ln 3 = **1.2039**

∴ Por integración directa, el área bajo la curva $xy = 1$ es de 1.2039 unidades de superficie.

Comparando los resultados (véase la Figura 4), observamos que: **1.2100 ≈ 1.2039**

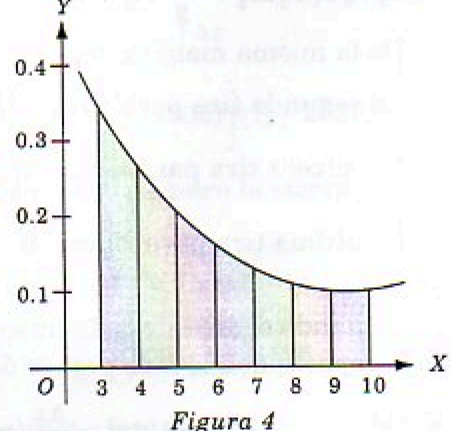


Figura 4

Fórmula de Simpson o parabólica

Uniendo las extremidades de las ordenadas sucesivas por arcos de parábolas y sumando las áreas bajo dichos arcos se obtiene una mayor aproximación del área bajo una curva.

Una parábola con eje vertical puede hacerse pasar por tres puntos cualesquiera de una curva; una serie de arcos parabólicos se aproximará lo más posible a la curva dada que la línea quebrada formada por las cuerdas que dan lugar a los trapecios.

La ecuación de dicha parábola tiene la forma $y = ax + 2bx + c$, donde los valores de las constantes a, b y c pueden determinarse de manera que esta parábola pase por tres puntos dados.

Dividamos el intervalo desde $x = a = OM_0$ hasta $x = b = OM_n$ en un número n *(par)* de partes iguales, cada una de tamaño Δx. Para cada serie de tres puntos sucesivos P_0, P_1, P_2; P_2, P_3, P_4; P_4, P_5, P_6, **etc.**, se trazan arcos de parábolas con ejes verticales. Las ordenadas de dichos puntos son $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, tal y como se indica en la Figura 5.

Sustituyendo el área $M_0 P_0 P_n M_n$ por una serie de *Tiras parabólicas dobles* como $M_0\ P_0\ P_1\ P_2\ M_2$, cuya extremidad superior es en cada caso un arco parabólico cuya ecuación es $y = ax^2 + 2bx + c$. El área de cada tira se obtiene empleando la fórmula:

$$\textbf{Área} = \frac{h}{3}(y + 4y' + y'')$$

Para la primera tira parabólica, tenemos que $h = \Delta x$, $y = y_0$, $y' = y_1$, $y'' = y_2$; luego su área es:

$$M_0 P_0 P_1 P_2 M_2 = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Figura 5

De la misma manera, tenemos que para:

La segunda tira parabólica: $M_2\ P_2\ P_3\ P_4\ M_4 = \dfrac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$

La tercera tira parabólica: $M_4\ P_4\ P_5\ P_6\ M_6 = \dfrac{\Delta x}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6), \ldots,$

La última tira parabólica: $M_{n-2}\ P_{n-2}\ P_{n-1}\ P_n\ M_n = \dfrac{\Delta x}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$

Sumando el área de cada una de las tiras parabólicas, obtenemos la ***fórmula de Simpson***, donde n es par; es decir:

$$\textbf{Área total} = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_n)$$

Al igual que en la fórmula de los trapecios, cuanto mayor sea el número de partes en que se divide $M_0 M_n$ tanto más se aproximará el resultado al área bajo la curva.

EJEMPLOS

1. Empleando la fórmula de Simpson, calcular el área aproximada para la curva $y = x^3$, dividiendo de $x = 2$ a $x = 10$ en ocho intervalos. Comparar el resultado obtenido, aplicando la fórmula de los trapecios y efectuando la integración directa.

Solución

Determinando la longitud de cada intervalo, tenemos: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{10-2}{8} = 1$

Para la curva $y = x^3$, construimos la siguiente tabla para los valores de abscisa sucesivos de tamaño $\Delta x = 1$, a partir de $x = 2$ a $x = 10$.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de Simpson, resultando:

$$\text{Área total} = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \ldots + y_n\right)$$

$$\text{Área total} = \frac{1}{3}[8 + 4(27) + 2(64) + 4(125) + 2(216) + 4(343) + 2(512) + 4(729) + 1000] = \mathbf{2496}$$

∴ **Por la fórmula de Simpson, el área aproximada de la curva $y = x^3$ es de 2496.**

Aplicando la fórmula de los trapecios, resulta:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{1}{2}(8) + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 + 729 + \frac{1}{2}(1000)\right](1) = \mathbf{2520}$$

∴ **Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada para la curva $y = x^3$ es de 2520 unidades de superficie.**

Efectuando la integración directa (aplicando la fórmula 4), resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_2^{10} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right]_2^{10} = \frac{(10)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4} 2500 - 4 = \mathbf{2\,496}$$

∴ **Por integración directa el área bajo la curva $y = x^3$ es de 2 496 unidades de superficie.**

Comparando resultados, observamos que por la fórmula de Simpson y por integración directa obtenemos el mismo resultado; también nótese que por la fórmula de Simpson obtenemos una mayor aproximación del área que por la fórmula de los trapecios.

2. Empleando la fórmula de Simpson, calcular el área aproximada para la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$, dividiendo de $x = 0$ a $x = 4$ en cuatro intervalos. Comparar el resultado obtenido, aplicando la fórmula de los trapecios y efectuando la integración directa.

Solución

Determinando la longitud de cada intervalo, tenemos: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{4-0}{4} = 1$

De la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$ construimos la siguiente tabla para los valores de abscisa sucesivos de tamaño $\Delta x = 1$, a partir de $x = 0$ a $x = 4$.

x	0	1	2	3	4
y	0	4.898	9.165	12	12

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de Simpson, resultando:

$$\text{Área total} = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 ... + y_n\right)$$

$$\text{Área total} = \frac{1}{3}\left[0 + 4(4.898) + 2(9.165) + 4(12) + 12\right] = \mathbf{32.640}$$

$\therefore$ **En virtud de la fórmula de Simpson, el área aproximada para la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$ es de 32.640 unidades de superficie.**

Aplicando la fórmula de los trapecios, resulta:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1} + y_n\right)\Delta x$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{1}{2}(0) + 4.898 + 9.165 + 12 + \frac{1}{2}(12)\right](1) = \mathbf{32.063}$$

$\therefore$ **Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada para la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$ es de 32.063 unidades de superficie.**

Efectuando la integración directa (aplicando la fórmula [4]), resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^4 x\sqrt{25 - x^2}\,dx = -\frac{\left(25 - x^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg]_0^4 = -9 + 41.666 = \mathbf{32.666}$$

$\therefore$ **Por integración directa, el área bajo la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$ es de 32.666 unidades de superficie.**

Comparando resultados, observamos que por la fórmula de Simpson se aproxima mucho al resultado por integración directa; mientras que por la fórmula de los trapecios se nota mucho la desviación del resultado real.

3. Empleando la fórmula de Simpson, calcular el área aproximada para la curva $y=\sqrt{2-\cos^2\theta}$, dividiendo de $\theta=0$ a $\theta=\pi/2$ en seis intervalos. Comparar el resultado obtenido, aplicando la fórmula de los trapecios.

Solución

La longitud de cada intervalo es: $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{\pi/2-0}{6}=\dfrac{\pi}{12}$

De la curva $y=\sqrt{2-\cos^2\theta}$ construimos la siguiente tabla para los valores de abscisa sucesivos de tamaño $\Delta x=\pi/12$ a partir de $\theta=0$ a $\theta=\pi/2$.

x	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
y	1	1.032	1.118	1.224	1.322	1.390	1.414

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de Simpson, resultando:

$$\text{Área total}=\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4\ldots+y_n)$$

$$\text{Área total}=\frac{\pi/12}{3}[1+4(1.032)+2(1.118)+4(1.224)+2(1.322)+4(1.390)+1.414]=\mathbf{1.9092}$$

∴ **Por la fórmula de Simpson, el área aproximada para la curva $y=\sqrt{2-\cos^2\theta}$ es de 1.9092 unidades de superficie.**

Aplicamos la fórmula de los trapecios y resulta:

$$\text{Área total}=\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$=\left[\frac{1}{2}(1)+1.032+1.118+1.224+1.322+1.390+\frac{1}{2}(1.414)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{1.9093}$$

∴ **Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada para la curva $y=\sqrt{2-\cos^2\theta}$ es de 1.9093 unidades de superficie.**

Comparando resultados, observamos que ambos son muy aproximados entre sí.

EJERCICIO XXIII

I. Empleando la fórmula de los trapecios, calcular el área aproximada para las siguientes integrales, dividiendo sus límites en el número n de intervalos indicados. Comparar el resultado obtenido efectuando la integración directa (siempre que sea posible).

1. $\int_1^6 \sqrt{x^2+3x}\, dx;\ n=5$ 4. $\int_2^9 \frac{x\, dx}{\sqrt{64-x^2}};\ n=7$ 7. $\int_0^{\pi} \sqrt{\cos\theta+1}\, d\theta;\ n=4$

2. $\int_2^5 \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+5}};\ n=3$ 5. $\int_4^{10} \frac{4\, dx}{x};\ n=6$ 8. $\int_2^4 \frac{x^2\, dx}{\sqrt[3]{10+x^2}};\ n=4$

3. $\int_3^8 x\sqrt{4+x^2}\, dx;\ n=5$ 6. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2+1};\ n=4$ 9. $\int_0^{\pi/2} \sec^4\theta\, d\theta;\ n=3$

II. Empleando la fórmula de Simpson, calcular el área aproximada de las siguiente integrales, dividiendo sus límites en el número n de intervalos indicados. Compa rar los resultados obtenidos aplicando la fórmula de los trapecios y efectuando l integración directa (siempre que sea posible).

1. $\int_2^6 \frac{t\, dt}{\sqrt{t^3+3}};\ n=6$ 4. $\int_0^4 \frac{dz}{\sqrt{z^3+4}};\ n=4$ 7. $\int_3^6 \frac{u\, du}{u^2+4};\ n=6$

2. $\int_0^3 \sqrt{x+16}\, dx;\ n=6$ 5. $\int_1^5 \sqrt{126-x^3}\, dx;\ n=4$ 8. $\int_2^8 \sqrt{64-x^2}\, dx;\ n=6$

3. $\int_2^5 \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x^3+1}};\ n=6$ 6. $\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx;\ n=4$ 9. $\int_3^7 \frac{dz}{\sqrt{64-z^2}};\ n=4$

4.5 OBTENCIÓN DE ÁREAS PLANAS POR INTEGRACIÓN CUANDO LA DIFERENCIAL DE ÁREA ES UNA FUNCIÓN CARTESIANA

Introducción

El área entre una curva $y = f(x)$, el eje de las X y las ordenadas correspondientes $x = a$ y $x = b$ está dada por la fórmula:

$$\textbf{Área} = \int_a^b y\, dx$$

La fórmula anterior es fácil de recordar, puesto que el elemento de área es un rectángulo como BQ (Figura 1) de base dx y altura y.

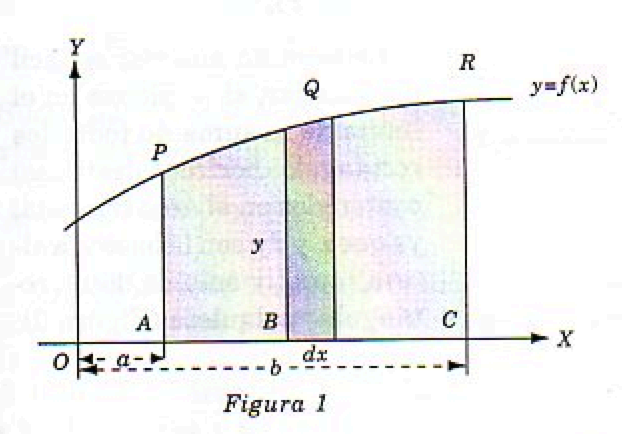


Figura 1

El área buscada $ACRP$ es el límite de la suma de todos esos rectángulos (tiras) ubicados entre las ordenadas AP y CR.

Se aplica el teorema fundamental del cálculo integral al cálculo del área de la superficie limitada por la curva $x = \phi(y)$, el eje de las Y y las líneas horizontales $y = c$ y $y = d$.

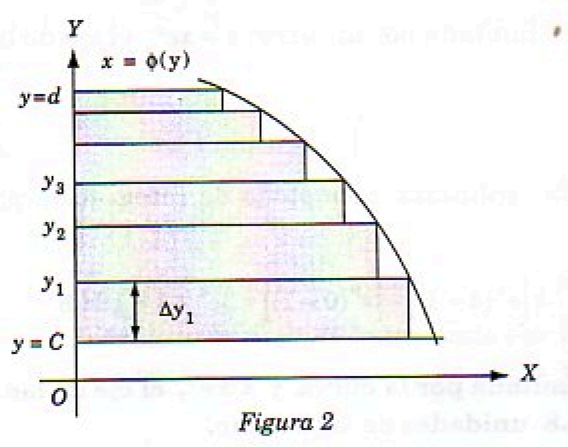


Figura 2

Primer paso. Se construyen los n rectángulos tal y como se indica en la Figura 2.

Naturalmente que el área buscada es el límite de la suma de las áreas de estos rectángulos cuando su número tiende a infinito y la altura de cada uno tiende a cero.

Segundo paso. Las alturas se representan con Δy_1, Δy_2, Δy_3, etc. En cada intervalo, tomamos un punto en la extremidad superior y designamos las ordenadas de dichos puntos como y_1, y_2, y_3, etc. Por lo anterior, las bases son $\phi(y_1)$, $\phi(y_2)$, $\phi(y_3)$, etc. Por tanto, la suma de las áreas de los rectángulos es:

$$\phi(y_1)\Delta y_1 + \phi(y_2)\Delta y_2 + \phi(y_3)\Delta y_3 + \ldots + \phi(y_n)\Delta y_n = \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)\Delta y_i$$

Tercer paso. Por el teorema fundamental del cálculo integral se obtiene:

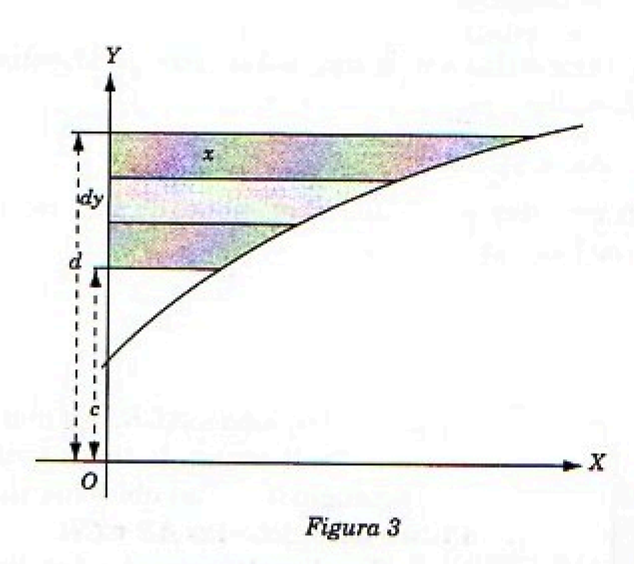


Figura 3

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)\Delta y_i = \int_c^d \phi(y)\, dy$$

Entonces el área entre una curva dada, el eje de las Y y las líneas horizontales $y = c$ y $y = d$ está dada por la fórmula:

$$\textbf{Área} = \int_c^d x\, dy$$

La fórmula anterior es fácil de recordar, si se piensa en el límite de la suma de todos los rectángulos horizontales (tiras) contenidos en el área buscada, ya que x y dy son la base y la altura, respectivamente, de un rectángulo cualquiera (Figura 3).

EJEMPLOS

1. Calcular el área de la superficie limitada por la curva $y = xe^x$, el eje de las X y la recta $x = 4$.

Solución

Sustituimos en la fórmula $\int_a^b y\, dx$, aplicamos el método de integración por partes, y resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\, dx = \int_0^4 xe^x dx = e^x(x-1)\Big]_0^4 = \left[e^4(4-1)\right] - \left[e^0(0-1)\right] = 3e^4 + 1 = \mathbf{164.8}$$

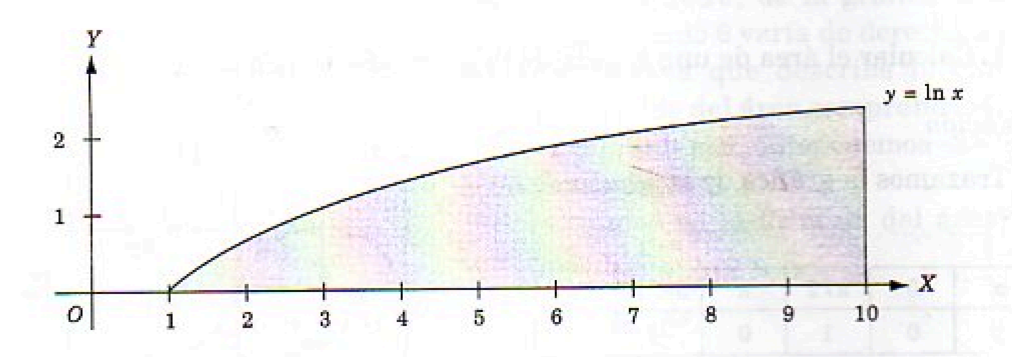
$\therefore$ **El área de la superficie limitada por la curva $y = xe^x$, el eje de las X y la recta $x = 4$ es de 164.8 unidades de superficie.**

2. Calcular el área de la superficie limitada por la curva $y = \ln x$, el eje de las X y la recta $x = 10$.

Solución

Hacemos la gráfica de la curva $y = \ln x$, y tenemos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	0	0.693	1.098	1.386	1.609	1.791	1.945	2.079	2.197	2.302



Sustituimos en la fórmula $\int_a^b y\,dx$, aplicamos el método de integración por partes, y resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_1^{10} \ln x\,dx = x(\ln x - 1)\Big]_1^{10} = [10(\ln 10 - 1)] - [1(\ln 1 - 1)] = \mathbf{14.0258}$$

$\therefore$ **El área de la superficie limitada por la curva $y = \ln x$, el eje de las X y la recta $x = 10$ es de 14.0258 unidades de superficie.**

3. Calcular el área de la superficie limitada por la curva $x = 9y - y^3$, el eje de las Y y las rectas $y = 0$ y $y = 3$.

Solución

Sustituyendo en la fórmula $\int_c^d y\,dx$ y aplicando la fórmula [4], resulta:

$$\text{Área} = \int_c^d x\,dy = \int_0^3 (9y - y^3)\,dy = \frac{9y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\Big]_0^3 = \frac{81}{4} = \mathbf{20.25}$$

$\therefore$ **El área de la superficie limitada por la curva $x = 9y - y^3$, el eje de las Y y las rectas $y = 0$ y $y = 3$ es de 20.25 unidades de superficie.**

Significado del signo negativo delante de un área

En la fórmula $\int_a^b y\,dx$, a es menor que b $(a < b)$. Puesto que ahora interpretamo el primer miembro como el límite de la suma de n términos que resultan de $y_i\,\Delta$ con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, se sigue que cuando y es *negativo* cada término de esa suma será negativo, y $\int_a^b y\,dx$ resultará con signo negativo. Lo anterior significa qu el área está debajo del eje de las X.

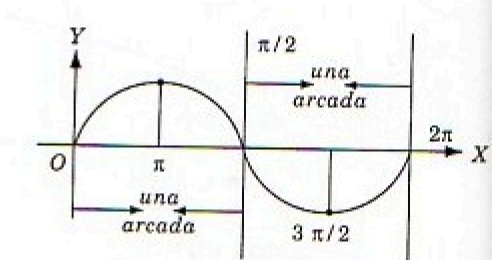
EJEMPLOS

1. Calcular el área de una arcada de la *sinusoide* $y = \text{sen } x$.

Solución

Trazamos la gráfica de la *sinusoide*:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y	0	1	0	−1	0



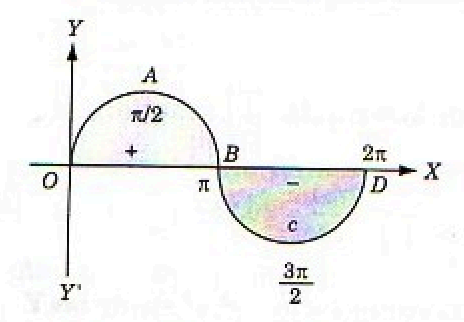
Sustituimos en la fórmula $\int_a^b y\,dx$, aplicamos la fórmula [8], y resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^{\pi} \text{sen } x\,dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

Cambiamos los límites de la arcada:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x\,dx = -\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos\pi) = -1 - 1 = -2$$

El área de una arcada de la sinusoide $y = \text{sen } x$ es:



Área (OAB) $= \int_0^{\pi} \text{sen } x\,dx = \mathbf{2}$ {Área ubicada por arriba del eje X

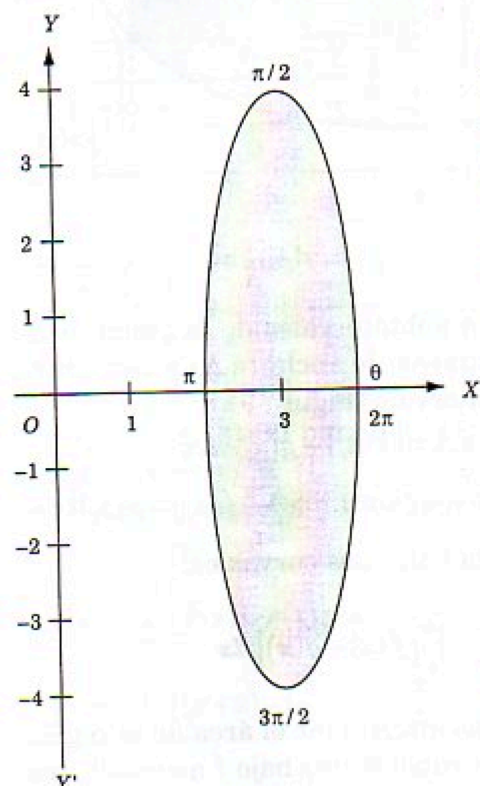
Área (BCD) $= \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x\,dx = \mathbf{-2}$ {Área ubicada por debajo del eje X

2. Calcular el área limitada por la curva $x = 3 + \cos\theta$ y $y = 4\ \text{sen }\theta$.

Solución

Primeramente trazamos los rasgos de la curva dada, es decir:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$4\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
x	4	3.866	3.5	3	2.5	2.134	2	2.134	2.5	3	3.5	3.866	4
y	0	2	3.464	4	3.464	2	0	−2	−3.464	−4	−3.464	−2	0



Como $y = 4 \text{ sen } \theta$ y $x = 3 + \cos \theta$, tenemos que $dx = -\text{ sen}\theta d\theta$; de la gráfica observamos que cuando θ varía de derecha a izquierda, el área que describe la curva dada es el doble del área comprendida de 0 a π. Por lo anterior, anteponemos −2 a las ecuaciones dadas.

Sustituimos en la fórmula del área, y tenemos:

$$\text{Área} = -2\int_a^b y\,dx$$

$$\text{Área} = -2\int_0^{\pi}(4 \text{ sen } 2\theta)(-\text{sen } \theta)\,d\theta$$

$$\text{Área} = 8\int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta\,d\theta$$

Para resolver la integral resultante, aplicamos el método de integración de productos de potencias pares de senos y cosenos, por medio de ángulos múltiplos (caso II); utilizamos la fórmula trigonométrica $\text{sen}^2 \theta = 1/2 - 1/2 \cos 2\theta$, y resulta:

$$\text{Área} = \int_0^{\pi} \text{sen}^2\, d\theta = 8\int_0^{\pi} (1/2 - 1/2 \cos 2\theta)\,d\theta = 4\theta - 2 \text{ sen } 2\theta\Big]_0^{\pi} = 4\pi$$

∴ **El área limitada por la curva $x = 3 + \cos\theta$ y $y = 4\,sen\,\theta$ es de 4π unidades de superficie.**

Área limitada por dos curvas

Extendamos la aplicación de la integral definida del cálculo del área bajo una curva al del área de una región limitada por dos curvas.

Consideramos la región acotada por las dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las dos rectas $x = a$ y $x = b$ (Figura 4). Supongamos que las dos funciones f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$.

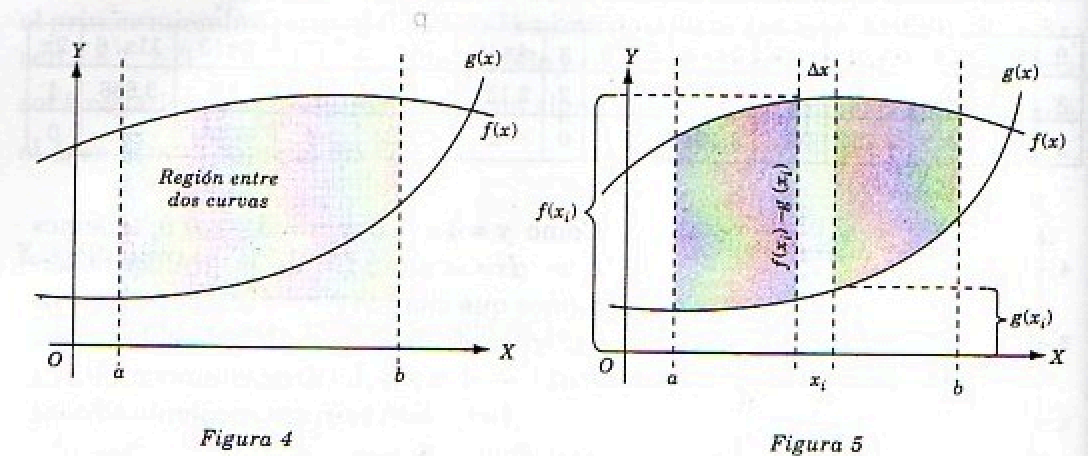


Figura 4 *Figura 5*

Dividamos el intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos de la longitud Δx cada uno, y tracemos un rectángulo representativo de anchura Δx y con altura $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i está en el i-ésimo subintervalo (Figura 5).

El área del rectángulo representativo es: $\Delta A = \left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x$.

La suma de las áreas de los n rectángulos en la gráfica es: $\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x$.

Por tanto, el área de la región comprendida entre dos curvas es:

$$\textbf{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Si f y g están por encima del eje X podemos interpretar el área de la región comprendida entre sus gráficas simplemente como el área bajo f menos el área bajo g (Figura 6).

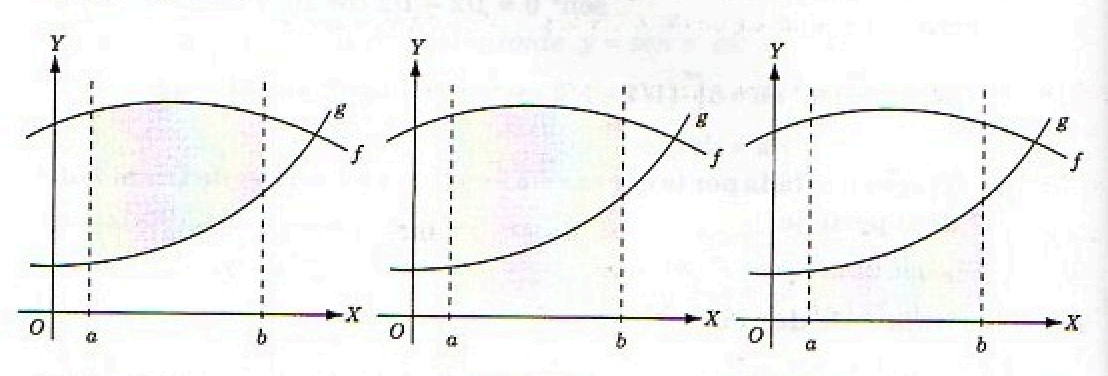


Figura 6

EJEMPLOS

1. Calcular el área de la región que está acotada por las dos curvas $y = x^2+2$ y $y = -x$ y las dos rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

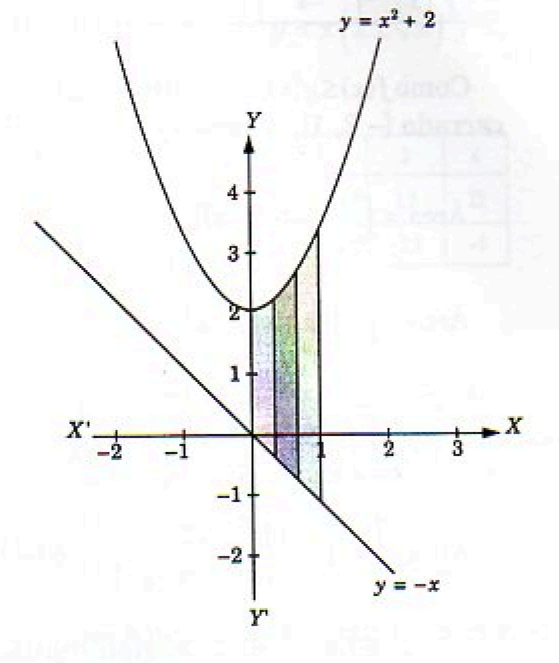
Hacemos la gráfica, y tenemos:

x	-1	0	1
y	3	2	3

para $y = x^2 + 2$

x	-1	0	1
y	1	0	-1

para $y = -x$



Tomamos $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$, y tenemos que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Aplicamos la fórmula para el área entre dos curvas:

$$\text{Área} = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

$$\text{Área} = \int_0^1 \left[(x+2) - (-x)\right] dx = \int_0^1 \left(x^2 + x + 2\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_0^1 = \frac{17}{6} = \mathbf{2.833}$$

$\therefore$ **El área de la región limitada por las dos curvas $y = x^2 + 2$ y $y = -x$ y las dos rectas $x = 0$ y $x = 1$ es de 17/6 unidades de superficie.**

2. Calcular el área de la región acotada por la curva $g(x) = 2 - x^2$ y la recta $f(x) = x$.

Solución

En este problema, los límites a y b vienen determinados por los puntos de intersección de las curvas f y g. Para hallarlos, es necesario igualar ambas ecuaciones entre sí y despejar x, es decir:

$$x = -x^2 \qquad\qquad x + 2 = 0 \qquad\qquad x - 1 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad\qquad \mathbf{x = -2} \qquad\qquad \mathbf{x = 1}$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

Gráficamente, tenemos:

x	−2	−1	0	1	2
$g(x)$	−2	1	2	1	−2
$f(x)$	−2	−1	0	1	2

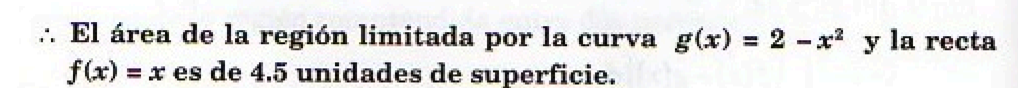
Como $f(x) \leq g(x)$ sobre el intervalo cerrado $[-2, 1]$, tenemos:

$$\text{Área} = \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} \left[\left(2 - x^2\right) - x\right] dx$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx = 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-2}^{1}$$

$$\text{Área} = \left[2(1) - \frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2}\right] - \left[2(-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2}\right] = \frac{9}{2} = \mathbf{4.5}$$



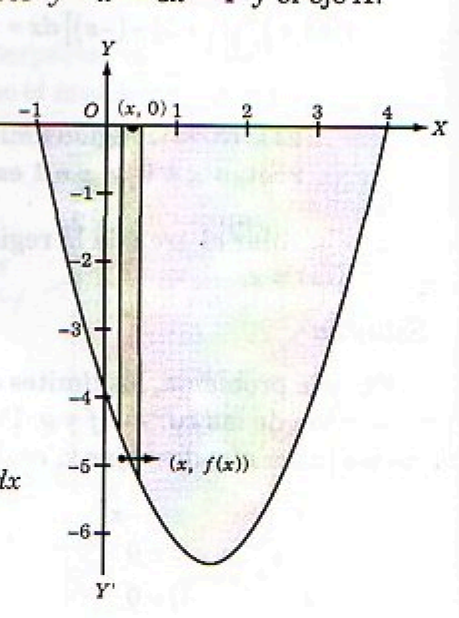
∴ **El área de la región limitada por la curva $g(x) = 2 - x^2$ y la recta $f(x) = x$ es de 4.5 unidades de superficie.**

3. Calcular el área de la región limitada por $y = x^2 - 3x - 4$ y el eje X.

Solución

Gráficamente, tenemos:

x	−1	0	1	2	3	4
y	0	4	−6	−6	−4	0



Como $y = x^2 - 3x - 4$ interseca al eje X en $x = -1$ y en $x = 4$, también $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ para toda x en el intervalo cerrado.

$$\text{Área} = \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx = \int_{-1}^{4} \left[0 - \left(x^2 - 3x - 4\right)\right] dx$$

$$\text{Área} = \int_{-1}^{4} \left(-x^2 + 3x + 4\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\Bigg]_{-1}^{4}$$

$$\text{Área}=\left[-\frac{(4)^3}{3}+\frac{3(4)^2}{2}+4(4)\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{3(-1)^2}{2}+4(-1)\right]=\frac{125}{6}$$

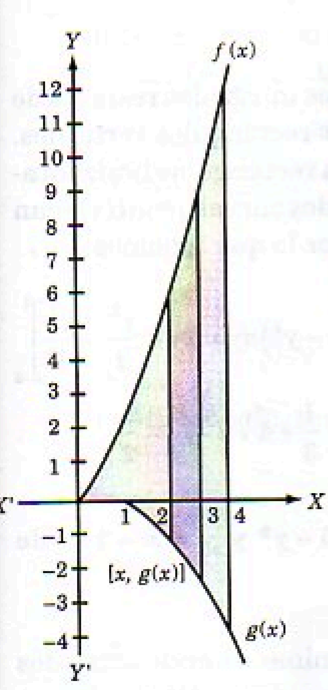
∴ **El área de la región acotada por $y=x^2-3x-4$ y el eje X es de $\frac{125}{6}$ unidades de superficie.**

4. Calcular el área de la superficie limitada por la curva $y=x\left(1\pm\sqrt{x}\right)$ y la recta $x=4$.

Solución

A partir de la curva $y=x\left(1\pm\sqrt{x}\right)$, hagamos $f(x)=x\left(1+\sqrt{x}\right)$ y $g(x)=x\left(1-\sqrt{x}\right)$ cuya representación gráfica es:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	2	4.8	8.2	12
$g(x)$	0	0	−0.82	−2.2	−4



$$\text{Área}=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^4\left[x\left(1+\sqrt{x}\right)-x\left(1-\sqrt{x}\right)\right]dx$$

$$\text{Área}=\int_0^4\left(x+x^{3/2}-x+x^{3/2}\right)dx=2\int_0^4 x^{3/2}\,dx=\frac{4x^{5/2}}{5}\Bigg]_0^4$$

$$\text{Área}=\frac{4(4)^{5/2}}{5}-\frac{4(0)^{5/2}}{5}=\frac{128}{5}$$

∴ **El área de la superficie limitada por la curva $y=x\left(1\pm\sqrt{x}\right)$ y la recta $x=4$ es de $\frac{128}{5}$ unidades de superficie.**

5. Calcular el área de la región comprendida entre $x=3-y^2$ y $y=x-1$.

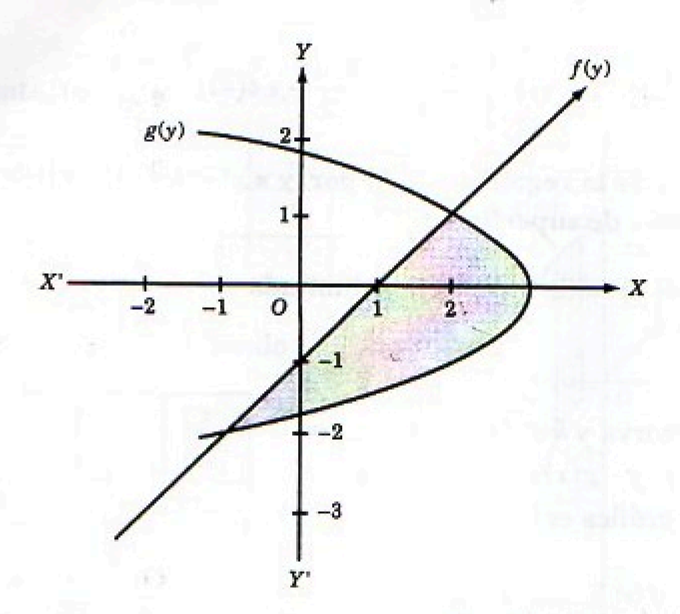
Solución

Gráficamente, tenemos:

$x=3-y^2$		
	y	x
	0	3
*	1	2
	2	−1
	−1	2
*	−2	−1

* *Indica los puntos de intersección.*

$y=x-1$		
	y	x
	0	−1
	1	0
*	2	1
	3	2
*	−1	−2
	−2	−3



Al observar la gráfica, se comprende que requerimos dos integrales respecto de la variable x para calcular el área, es decir, si empleamos rectángulos verticales.

Si integramos con respecto a y, es decir, si empleamos rectángulos horizontales, tenemos que $g(y) = 3 - y^2$ y $f(y) = y + 1$. Como estas dos curvas se intersecan en $y = -2$ y en $y = 1$, en este intervalo $f(y) \leq g(y)$, por lo que tenemos:

$$\text{Área} = \int_c^d [g(y) - f(y)]\,dy = \int_{-2}^{1}\left[\left(3 - y^2\right) - (y+1)\right]dy = \int_{-2}^{1}\left(2 - y - y^2\right)dy = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Bigg]_{-2}^{1}$$

$$\text{Área} = \left[2\,(1) - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3}\right] - \left[2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right] = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2}$$

$\therefore$ **El área de la región comprendida entre $x = 3 - y^2$ y $y = x - 1$ es de 9/2 unidades de superficie.**

Es necesario aclarar que, por lo general, para determinar el área entre dos curvas hay que aplicar, para rectángulos verticales, la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \int_{x_1}^{x_2} (\text{Curva superior}) - (\text{Curva inferior})\,dx \Big\}\ \textit{En la variable } x$$

Para rectángulos horizontales, la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \int_{y_1}^{y_2} (\text{Curva a la derecha}) - (\text{Curva a la izquierda})\,dy \Big\}\ \textit{En la variable } y$$

Aquí (x_1, y_1), (x_2, y_2) son o bien puntos adyacentes de intersección de las dos curvas o puntos sobre ciertas líneas del contorno.

Área limitada por dos curvas al intersecarse en más de dos puntos

Cuando dos curvas se cortan en *más* de dos puntos, entonces, para determinar el área de la región comprendida entre ellas, tenemos que buscar *todos* los puntos de intersección y comprobar en cada intervalo precisado por las curvas cuál de ellas está por encima de la otra.

EJEMPLOS

1. Calcular el área de la región acotada por las curvas $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = 3x - x^2 - 1$.

Solución

Primeramente se determinan los puntos de intersección de las dos curvas dadas; para ello igualamos ambas funciones, resultando:

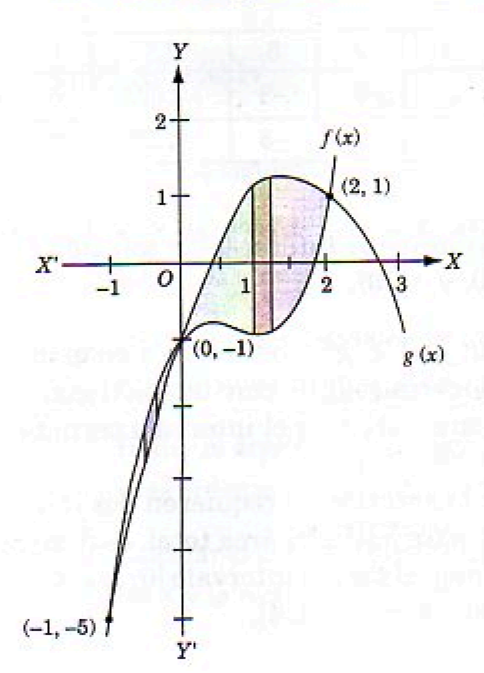
$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 3x - x^2 - 1 \qquad x\,(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 - 3x + x^2 + 1 = 0 \qquad x\,(x - 2)\,(x + 1) = 0$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \qquad \therefore\ x = 0,\ x = 2 \ \text{ y } \ x = 1$$

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	-5	-2.125	-1	-0.875	-1	-0.625	1
$g(x)$	-5	-2.75	-1	0.25	1	1.25	1

Gráficamente, tenemos:



Aquí $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo cerrado $[-1, 0]$, pero también $g(x) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo cerrado $[0, 2]$.

Por lo anterior, se requieren dos integrales para hallar el área total, es decir, una integral para el intervalo $[-1, 0]$ y otra para el intervalo $[0, 2]$.

$$\text{Área total} = \int_{-1}^{0}[f(x) - g(x)]\ dx + \int_{0}^{2}[g(x) - f(x)]\ dx$$

$$\text{Área total} = \int_{-1}^{0}[(x^3 - 2x^2 + x - 1) - (3x - x^2 - 1)\ dx + \int_{0}^{2}[(3x - x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2 + x - 1)]\ dx$$

$$\text{Área total} = \int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)\ dx + \int_{0}^{2}(2x + x^2 - x^3)\ dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{2} + \left[x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$

$$\text{Área total} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(4 + \frac{8}{3} - 4\right) = \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{12}}$$

∴ **El área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = 3x - x^2 - 1$ es de 37/12 unidades de superficie.**

2. Calcular el área de la región acotada por las curvas $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y $g(x) = x^2 - 4x$.

Solución

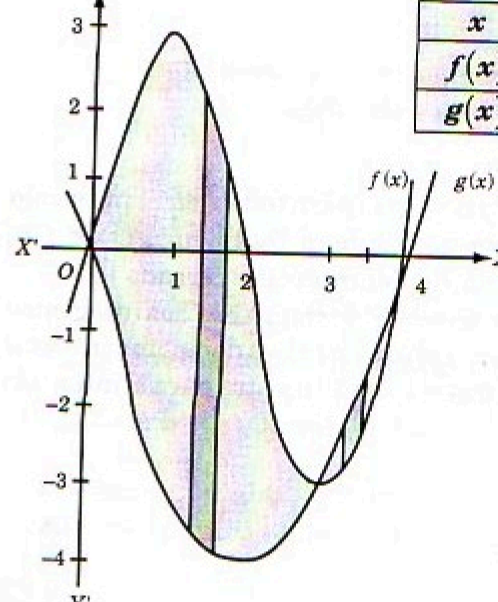
Primero se determinan los puntos de intersección entre las curvas; para ello igualamos ambas funciones entre sí y despejamos x:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x$$
$$x^3 - 6x^2 + 8x - x^2 + 4x = 0$$
$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$
$$x\left(x^2 - 7x + 12\right) = 0$$

$$x(x-4)(x-3) = 0 \qquad x - 3 = 0 \qquad x - 4 = 0$$
$$\boldsymbol{x = 0} \qquad \boldsymbol{x = 3} \qquad \boldsymbol{x = 4}$$

Gráficamente, tenemos:

x	0	1	2	3	3.5	4
$f(x)$	0	3	0	–3	–2.625	0
$g(x)$	0	–3	–4	–3	–1.75	0



∴ **Los puntos de intersección son: (0, 0), (3, – 3) y (4, 0).**

Aquí $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo cerrado [0, 3], pero también $g(x) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo cerrado [3, 4].

Por lo anterior, se requieren dos integrales para hallar el área total, es decir, una integral para el intervalo [0, 3] y otra para el intervalo [3, 4].

$$\text{Área total} = \int_0^3 [f(x) - g(x)]dx + \int_3^4 [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_0^3 \left[\left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) - \left(x^2 - 4x\right)\right]dx + \int_3^4 \left[\left(x^2 - 4x\right) - \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^3 \left(x^3 - 7x^2 + 12x\right) dx + \int_3^4 \left(7x^2 - 12x - x^3\right) dx$$

$$= \int_0^3 [f(x) - g(x)]dx + \int_3^4 [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_0^3 \left[\left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) - \left(x^2 - 4x\right)\right]dx + \int_3^4 \left[\left(x^2 - 4x\right) - \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^3 \left(x^3 - 7x^2 + 12x\right) dx + \int_3^4 \left(7x^2 - 12x - x^3\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} - 6x^2\right]_0^3 + \left[\frac{7x^3}{3} - 6x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_3^4$$

$$= \left(\frac{81}{4} - 63 + 54\right) + \left(\frac{448}{3} - 96 - 64\right) - \left(63 - 54 - \frac{81}{4}\right)$$

$$= \frac{81}{4} - 63 + 54 + \frac{448}{3} - 96 - 64 - 63 + 54 + \frac{81}{4} = \mathbf{\frac{71}{6}}$$

∴ El área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^3 - 6x^3 + 8x$ y $g(x) = x^2 - 4x$ es de 71/6 unidades de superficie.

EJERCICIO XXIV

I. Resolver los siguientes problemas.

1. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $y = (x-2)^2$, el eje de las X y las ordenadas $x=0$ y $x=4$.

2. Calcular el área de la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$, el eje de las X y las ordenadas $x=1$ y $x=4$.

3. Hallar el área de la superficie acotada por la curva $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$, el eje de las X y las ordenadas $x=-4$ y $x=4$.

4. Calcular el área de la región comprendida entre la curva $y = x\sqrt{x^2+5}$, el eje de las X y la recta $x=2$.

5. Hallar el área de la superficie limitada por la hipérbola $xy = 9$, el eje de las X y las ordenadas $x = 3$ y $x = 6$.

6. Calcular el área de la superficie limitada por la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$ y los ejes de las coordenadas.

7. Hallar el área total de la hipocicloide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{4}$.

8. Calcular el área de la región comprendida entre la parábola $y = 6 + 4x - x^2$ y la cuerda que une los puntos $(-2, -6)$ y $(4, 6)$.

9. Hallar el área de la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^3 = x^2$ y la cuerda que une los puntos $(-1, 1)$ y $(8, 4)$.

10. Calcular el área de la superficie acotada por la curva $x^2 y = x^2 - 1$ y las rectas $y = 1$, $x = 1$ y $x = 4$.

11. Hallar el área de la superficie limitada por la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 25$, el eje de las X y una recta trazada del origen al punto $(4, 3)$ de la curva.

12. Calcular el área de la superficie acotada por la parábola $y = 4 - x^2$, en la cual $x = -2$ y $x = 2$.

13. Hallar el área de la superficie que está encerrada por el *lazo* de la curva $4y^2 = x^2\ (4 - x)$.

14. Calcular el área de la región encerrada por el *lazo* de la curva $y^2 = x(x - 2)^2$.

15. Hallar el área de la superficie encerrada por el *lazo* de la curva $y^2 = x^2\,(9 - x)$.

II. Hallar las áreas de las superficies acotadas por las siguientes curvas. En cada problema trazar la gráfica correspondiente.

1. $y^2 = 2px,\ x^2 = 2py$
2. $y^2 = ax,\ x^2 = by$
3. $y^2 = x^2(x^2 - 1),\ x = 2$
4. $y^2 = x^3 - x^2,\ x = 2$
5. $x^2 - y^2 = a^2,\ x = 2a$
6. $x^2 - 4y^2 = 4,\ x = 6$
7. $y = x^3 - 3x,\ x = y$
8. $y^2 = 6x,\ x^2 = 6y$
9. $y^2 = 4x,\ 2x - y = 4$
10. $y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x$

11. $y^2 = 4x,\ x = 12 + 2y - y^2$

12. $y = 6x - x^2 \quad x = y$

13. $y^2 = 4x,\ 2x - y = 4$

14. $y = 4 - x^2,\ x = 1 - y/4$

III. Los ejes coordenados y las coordenadas del punto $A(1, 1)$ forman un cuadrado. Calcular la razón de la mayor a la menor de las áreas en las que es dividido por cada una de las siguientes curvas.

1. $y = x^4$
2. $y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}$
3. $y = xe^{x-1}$
4. $y = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$
5. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2$
6. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$

IV. De cada una de las siguientes curvas, calcular el área de la región del primer cuadrante acotada por el arco de curva que va desde el eje de las Y hasta la primera intersección con el eje de las X.

1. $y = e^x \operatorname{sen} x$
2. $y = \operatorname{sen}(x + 1)$
3. $y = e^{\frac{x}{2}} \cos 2x$
4. $y^2 = (4 - x)^3$
5. $y = x^3 - 8x^2 + 15x$
6. $y = 4e^{\frac{x}{2}} \cos\dfrac{\pi x}{2}$

4.6 OBTENCIÓN DE ÁREAS PLANAS POR INTEGRACIÓN CUANDO LA DIFERENCIAL DE ÁREA ES UNA FUNCIÓN POLAR

Introducción

De lo que se trata es de hallar el área acotada por una curva y dos de sus radios vectores.

Supongamos que la ecuación de la curva se representa con $e = f(\theta)$ y los dos radios vectores con OP_1 y OD (Figura 1).

Sean también α y β los ángulos que forman dichos radios vectores y el eje polar. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, tenemos:

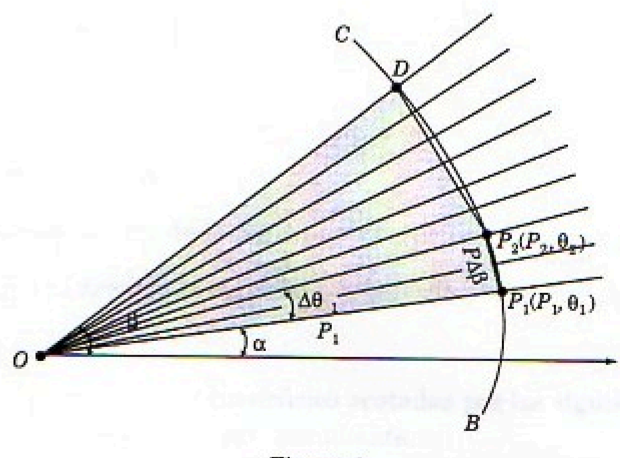


Figura 1

Primer paso. Con base en la Figura 1, el área pedida es el límite de la suma de los sectores circulares construidos.

Segundo paso. Sean los ángulos centrales de los sectores $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$, etc., y sus radios e_1, e_2, e_3, etc. Entonces la suma de las áreas de los sectores es:

$$1/2e^2_1\ \Delta\theta_1 + 1/2e^2_2\ \Delta\theta_2 + 1/2e^2_3\ \Delta\theta_3 + \ldots + 1/2e^2_n\ \Delta\theta_n = \sum_{i=1}^{n} 1/2\, e^2_i\ \Delta\theta_i$$

Lo anterior se debe a que el área de un sector circular es igual a **1/2 radio por arco**; entonces el área del primer sector es igual a $(1/2\ e_1)\ (e_1\Delta\theta_1) = 1/2e^2{}_1 = \Delta\theta_1$.

Tercer paso. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1/2 e_i^2\ \Delta\theta_i = \int_\alpha^\beta 1/2 e^2 d\theta$$

Por lo anterior, el área *barrida* por el radio vector de la curva cuando pasa de la posición OP a la posición OD está dada por la fórmula:

$$\text{Área} = 1/2\int_\alpha^\beta e^2\, d\theta$$

Sustituimos en la ecuación de la curva el valor de e en términos de θ.

Por tanto, el elemento de área para $1/2\int_\alpha^\beta e^2 d\theta$ es un sector circular de radio e y ángulo central $d\theta$.

EJEMPLOS

1. Hallar el área de la superficie limitada por el círculo $e = a \cos\theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 60$.

Solución

Sustituyendo directamente en la fórmula de área, tenemos:

$$\text{Área} = 1/2\int_\alpha^\beta e^2 d\theta = 1/2\int_0^{60^\circ} (a\cos\theta)^2\, d\theta = a^2/2\int_0^{\pi/3} \cos^2\theta\, d\theta$$

Aplicamos la fórmula $\cos^2\theta = 1/2 + 1/2\cos 2\theta$, y resulta:

$$a^2/2\int_0^{\pi/3}\cos^2\theta\ d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = a^2/4\int_0^{\pi/3} \underset{①}{d\theta} + a^2/4\int_0^{\pi/3} \underset{②}{\cos 2\theta\, d\theta}$$

Integramos directamente ① y ② por las fórmulas [1] y [9], respectivamente:

$$a^2/4\int_0^{\pi/3} d\theta + a^2/4\int_0^{\pi/3}\cos 2\theta\, d\theta = \left.\frac{a^2\theta}{4} + \frac{a^2 \text{ sen } 2\theta}{8}\right]_0^{\pi/3}$$

$$a^2/4\int_0^{\pi/3} d\theta + a^2/4\int_0^{\pi/3}\cos 2\theta\, d\theta = \left[\frac{a^2(\pi/3)}{4} + \frac{a^2 \text{ sen } 2(\pi/3)}{8}\right] - \left[\frac{a^2(0)}{4} + \frac{a^2(\text{sen}\, 2(0))}{8}\right]$$

$$a^2/4\int_0^{\pi/3} d\theta + a^2/4\int_0^{\pi/3}\cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2\pi}{12} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \mathbf{0.37}\, a^2$$

∴ **El área de la superficie limitada por el círculo $e = a\cos\theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 60°$ es de $0.37\ a^2$ unidades de superficie.**

2. Hallar el área total de la superficie limitada por la curva $e = a$ sen 2θ.

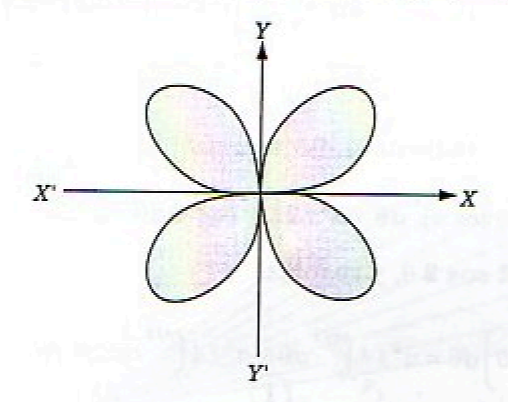
Solución

Hacemos la gráfica de la curva dada, y tenemos:

θ	0	π/12	π/6	π/4	π/3	5π/12	π/2	7π/12	2π/3	3π/4	5π/6	11π/12	π
e	0	1/2	√3/2	1	√3/2	1/2	0	−1/2	−√3/2	−1	−√3/2	−1/2	0

13π/12	7π/6	5π/4	4π/3	17π/12	3π/2	19π/12	5π/3	7π/4	11π/6	23π/12	2π
1/2	√3/2	1	√3/2	1/2	0	−1/2	−√3/2	−1	−√3/2	−1/2	0

Nota: *Para tabular y hacer la gráfica, consideramos el valor de a = 1.*



Rosa de cuatro hojas

Puesto que $e = \theta$ cuando θ varía desde 0 a π/2, describiendo el área de una hoja, el área total es igual a cuatro veces el área de dicha hoja.

Sustituyendo en la fórmula del área, tenemos:

$$\text{Área total} = 4\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\alpha}^{\beta} e^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/2}(a\,\text{sen}\,2\theta)^2\,d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2} sen^2\,2\theta\,d\theta$$

Aplicamos la fórmula **sen² 2θ = 1/2 − 1/2 cos 4θ**, tenemos:

$$2a^2\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2\,2\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}(1/2 - 1/2\ \cos\ 4\theta)\,d\theta = a^2\int_0^{\pi/2}d\theta - a^2\int_0^{\pi/2}\cos\ 4d\theta$$

① ②

Integramos ① y ② directamente por las fórmulas [1] y [9], respectivamente:

$$a^2\int_0^{\pi/2} d\theta - a^2\int_0^{\pi/2} \cos 4\theta\, d\theta = a^2\theta - \frac{a^2 \text{sen } 4\theta}{4}\Bigg]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left[a^2(\pi/2) - \frac{a^2 \text{ sen } 4\,(\pi/2)}{4}\right] - \left[a^2\,(0) - \frac{a^2 \text{ sen } 4(0)}{4}\right] = \frac{a^2\pi}{2}$$

∴ **El área total de la superficie limitada por la curva $e = a$ sen 2θ es de $\frac{a^2\pi}{2}$ unidades de superficie.**

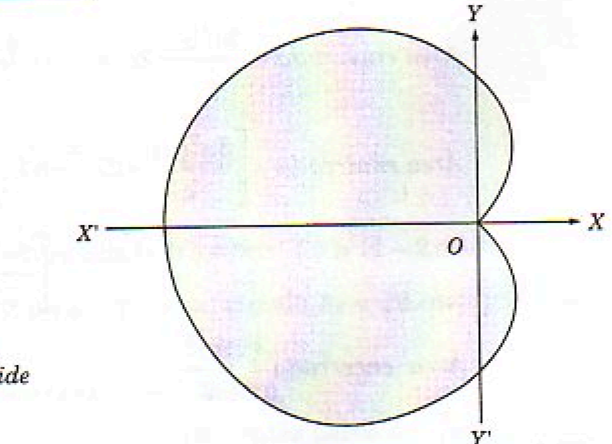
3. Hallar el área de la superficie encerrada por la curva $e = a\ (1 - \cos\theta)$.

Solución

Al hacer la gráfica de la curva dada tenemos:

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3
e	0	0.134	0.292	0.5	1	1.5	1.707	1.866	2	1.866	1.707	1.5

3π/2	5π/3	7π/4	11π/6	2π
1	0.5	0.292	0.134	0



Cardioide

Puesto que la curva es simétrica con respecto al eje X, el área de la superficie encerrada por la curva $e = a\ (1 - \cos\theta)$, cuando θ varía desde 0 hasta 2π, es dos veces el área que describe el radio vector desde θ = 0 hasta θ = π.

Al sustituir en la fórmula del área, tenemos:

$$\text{Área encerrada} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\alpha}^{\beta} e^2\, d\theta = \int_0^{\pi} [a(1-\cos\theta)]^2\, d\theta = \int_0^{\pi} a^2\left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$\text{Área encerrada} = \underset{①}{a^2\int_0^{\pi} d\theta} - \underset{②}{2a^2\int_0^{\pi}\cos\theta\, d\theta} + \underset{③}{a^2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta}$$

Integramos ① y ② directamente con las fórmulas [1] y [9], respectivamente:

$$a^2\int_0^{\pi} d\theta - 2a^2\int_0^{\pi}\cos\theta\, d\theta = a^2\theta - 2a^2\,\text{sen}\,\theta\Big]_0^{\pi}$$

En la integral ③, aplicamos la fórmula **$\cos^2\theta = 1/2 + 1/2\cos 2\theta$**, y tenemos

$$a^2\int_0^{\pi}\cos^2 d\theta = a^2\int_0^{\pi}(1/2+1/2\cos 2\theta)\, d\theta = \underset{③a}{\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} d\theta} + \underset{③b}{\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\, d\theta}$$

Integrando ③a y ③b directamente con las fórmulas [1] y [9], respectivamente:

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} d\theta + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\, d\theta = \left[\frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2\,\text{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^{\pi}$$

Escribimos en forma unificada el resultado de cada integral, y tenemos:

$$\text{Área encerrada} = a^2\theta - 2a^2\,\text{sen}\,\theta + \frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2\,\text{sen}\,2\theta}{4}\Bigg]_0^{\pi}$$

$$\text{Área encerrada} = \frac{3a^2\theta}{2} - 2a^2\,\text{sen}\,\theta + \frac{a^2\,\text{sen}\,2\theta}{4}\Bigg]_0^{\pi}$$

$$\text{Área encerrada} = \left[\frac{3a^2(\pi)}{2} - 2a^2\,\text{sen}\,(\pi) + \frac{a^2\,\text{sen}\,2(\pi)}{4}\right] - \left[\frac{3a^2(0)}{2} - 2a^2\,\text{sen}\,(0) + \frac{a^2\,\text{sen}\,2(0)}{4}\right]$$

$$\text{Área encerrada} = \frac{3a^2}{2}$$

∴ **El área de la superficie encerrada por la curva $e = a\ (1-\cos\theta)$ es de $\frac{3a^2}{2}$ unidades cuadradas.**

EJERCICIO XXV

I. Resolver los siguientes problemas.

1. Hallar el área de la superficie encerrada por cada una de las siguientes curvas.

a) $e = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ e) $e^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$ i) $e = a\,\text{sen}\,n\theta$

b) $e = 3 + \cos 3\theta$ f) $e = a\cos 3\theta$ j) $e = \cos 3\theta - 2\cos\theta$

c) $e = \text{sen}^2\frac{\theta}{2}$ g) $e = 1/2 + \cos 2\theta$ k) $e = \cos 3\theta - \cos\theta$

d) $e = 2 - \cos\theta$ h) $e = 2 + \text{sen}\,3\theta$ l) $e = a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta$

2. Calcular el área de la superficie limitada por la parábola $e = \dfrac{a}{1+\cos\theta}$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi/3$.

3. Calcular el área de la superficie limitada por la parábola $e = a\sec^2\frac{\theta}{2}$, que es intersecada entre la curva y el lado recto, es decir, la cuerda trazada por el foco, perpendicular al eje de simetría.

4. Calcular el área de la superficie limitada por $e = a^2$ sen 4θ.

5. Calcular las áreas de las superficies limitadas por las siguientes curvas y las rectas dadas.

a) $e = \text{tg}\,\theta + \sec\theta$; $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$

b) $e = e^{\theta/2}$; $\theta = \pi/4$, $\theta = \pi/2$

c) $e = a\,\text{sen}\,\theta + b\cos\theta$; $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$

d) $e = \text{tg}\,\theta$; $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$

6. Calcular el área del lazo interior de la trisectriz $e = a\ (1 - 2\cos\theta)$.

7. Calcular el área de la superficie interior al círculo $3e = \sqrt{3}\cos\theta$ y al bucle de la curva $e = \cos 2\theta$ desde $\theta = -\pi/4$ hasta $\theta = \pi/4$.

8. Calcular el área total de la curva $e^2 = a^2\ \cos 2\theta$.

9. Hallar el área en común que tienen los siguientes pares de curvas.

a) $e^2 = \cos 2\theta$, $e^2 = \text{sen}\ 2$ e) $e = \sqrt{2}\cos\theta$, $e = \sqrt{3}\ \text{sen}\ 2\theta$

b) $e = \sqrt{2}\ \text{sen}\ \theta$, $e^2 = \cos 2\theta$ f) $e = \sqrt{6}\cos\theta$, $e = 9\cos 2\theta$

c) $e = 1 - \cos\theta$, $e = \text{sen}\ \theta$ g) $e^2 = e^2\, 2\cos 2\theta$, $e = 1$

d) $e = 3\cos\theta,\ e = 1 + \cos\theta$ h) $e = 1 + \cos\theta,\ e = 1$

10. Calcular el área de la superficie interior al círculo $3e = \sqrt{6}$ sen 2θ y al *bucle* de la curva $e^2 = \cos 2\theta$ desde $\theta = -\pi/4$ hasta $\theta = \pi/4$.
11. La cara de un travesaño arqueado es la región que está acotada por la curva $e^2 = 4\cos 2\theta$. ¿Cuánto material se necesita para cubrir la cara de dicho travesaño?
12. Hallar el área limitada por un rizo de la curva $e = a$ sen $n\theta$, donde n es un número entero positivo.

4.7 OBTENCIÓN DE VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN POR INTEGRACIÓN

Introducción

Sea V el volumen del sólido de revolución que se genera haciendo girar una superficie plana $ABCD$ alrededor del eje X, en donde la ecuación de la curva plana CD es $y = f(x)$ (Figura 1).

Primer paso. Se divide el segmento AB en n partes, cuyas longitudes sean $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$ y se hace pasar por cada punto de división un plano perpendicular al eje de las X. Dichos planos dividirán el sólido en n placas circulares. Si dentro de la superficie plana $ABCD$ se construyen rectángulos con las bases $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$, entonces cada rectángulo genera un cilindro de revolución cuando se hace girar la superficie plana $ABCD$.

De esta forma se obtiene un cilindro correspondiente a cada una de las placas circulares. (En la Figura 2 observamos que $n = 4$ y se ven dos cilindros.) El límite de la suma de estos n cilindros ($n \to \infty$) es el volumen buscado.

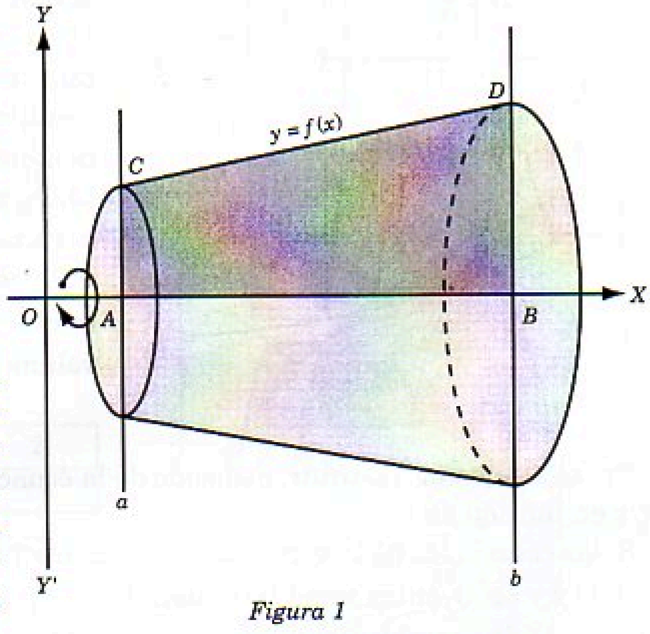


Figura 1

Segundo paso. Sean y_1, y_2, $y_3, \ldots, y_n$ las ordenadas de la curva CD en los puntos de división en el eje de las X. Entonces el volumen del cilindro generado por la superficie del rectángulo $AEFC$ es $\pi y_1^2 \Delta x_1$, y la suma de los volúmenes de todos estos cilindros es:

$$\pi y_1^2 \Delta x_1 + \pi y_2^2 \Delta x_2 + \pi y_3^2 \Delta x_3 + \ldots + \pi y_n^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i$$

Tercer paso. Aplicamos el teorema fundamental del cálculo integral (teniendo como límites $OA = a$ y $OB = b$), y resulta:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 dx$$

Por lo tanto, el volumen que se genera haciendo girar alrededor del eje de las X la superficie limitada por la curva, el eje de las X y las ordenadas $x = a$ y $x = b$ está dado por la fórmula:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

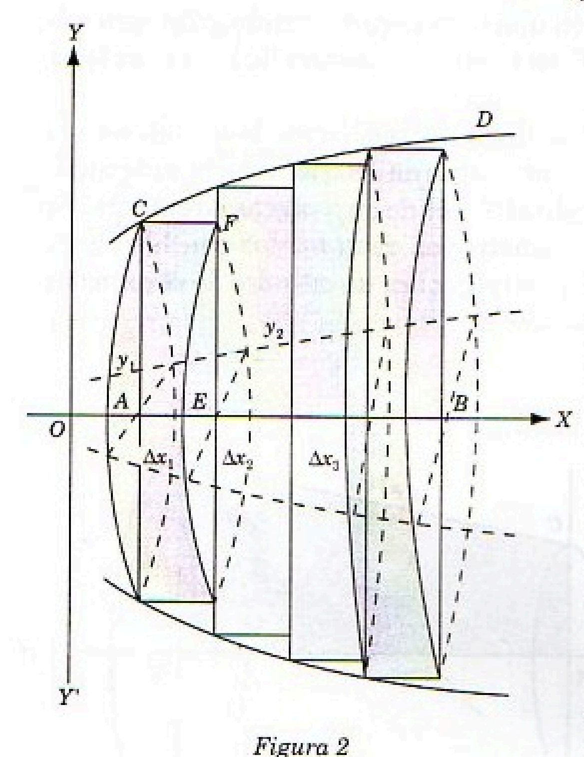


Figura 2

En ella se ha de sustituir, deducido de la ecuación de la curva dada, el valor de y en términos de x.

Esta ecuación $V_x = \pi \int_a^b y^2 \, dx$ es fácilmente comprensible si consideramos una rebanada o placa delgada del sólido formado por dos planos perpendiculares al eje de revolución y observamos que esta placa circula, aproximadamente, como un cilindro de altura dx y base de área πy^2. Evidentemente, el volumen de un cilindro tal es $\pi y^2 \, dx$. Dicho cilindro es el elemento de volumen buscado.

De la misma manera, cuando OY es el eje de revolución la fórmula del volumen es: $V_y = \pi \int_a^b y^2 \, dy$.

En ella se ha de sustituir, deducido de la ecuación de la curva dada, el valor de x en función de y.

Si las ecuaciones de la curva CD de la Figura 2 se dan en forma paramétrica, $x = f(t)$ y $y = \phi(t)$, entonces se debe sustituir en $V_x = \pi \int_a^b y^2 \, dx$ los valores $y = \phi(t)$, $dx = f'(t) \, dt$ y cambiar los límites en t_1 y t_2. Si $t = t_1$, cuando $x = a$, $t = t_2$ cuando $x = 0$.

EJEMPLOS

1. Calcular el volumen de la esfera que se genera haciendo girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de un diámetro.

Solución

Aquí $y^2 = r^2 - x^2$ y el volumen buscado es dos veces el volumen engendrado por *OAB*. Como *OX* es el eje de revolución, tenemos:

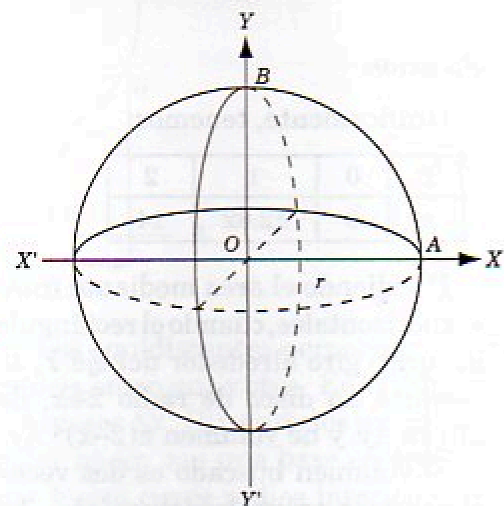
$$V_x = 2\pi\int_a^b y^2\,dx$$

$$V_x = 2\pi\int_o^r \left(r^2 - x^2\right)dx = 2\pi r^2 x - \frac{2\pi x^3}{3}\Bigg]_o^r$$

$$V_x = 2\pi r^2(r) - \frac{2\pi(r)^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

∴ **El volumen de la esfera que se genera haciendo girar el círculo $x^2+y^2=r^2$ alrededor de un diámetro es de $\frac{4\pi r^3}{3}$ unidades cúbicas.**

Gráficamente tenemos:

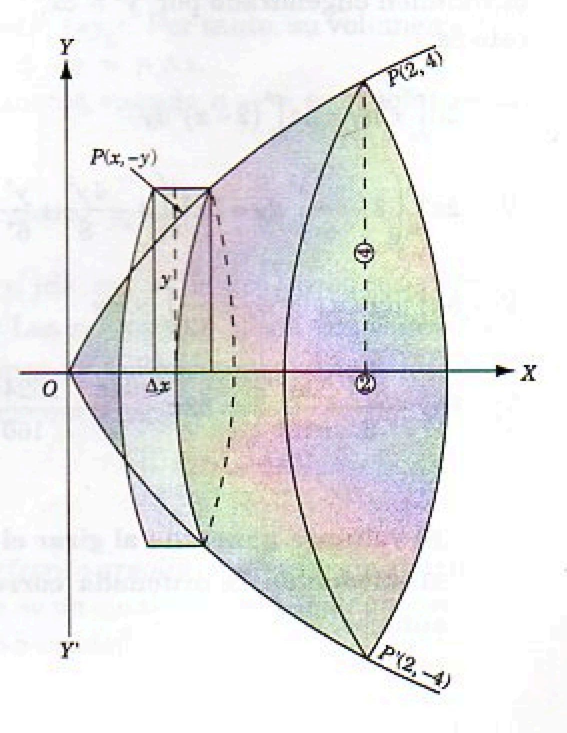


2. Hallar el volumen generado en la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto al eje X.

Solución

Gráficamente, tenemos:

x	0	1	2
y	0	±2.82	±4



Dividimos el área mediante franjas verticales; cuando el rectángulo genérico gire alrededor del eje X se produce un disco de radio y, de altura Δx y de volumen $\pi y^2 \Delta x$. La suma de los volúmenes de los n discos, correspondientes a los n rectángulos, resulta ser el volumen pedido:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^2 8x\,dx = \left[4\pi x^2\right]_0^2 = \mathbf{16\pi}$$

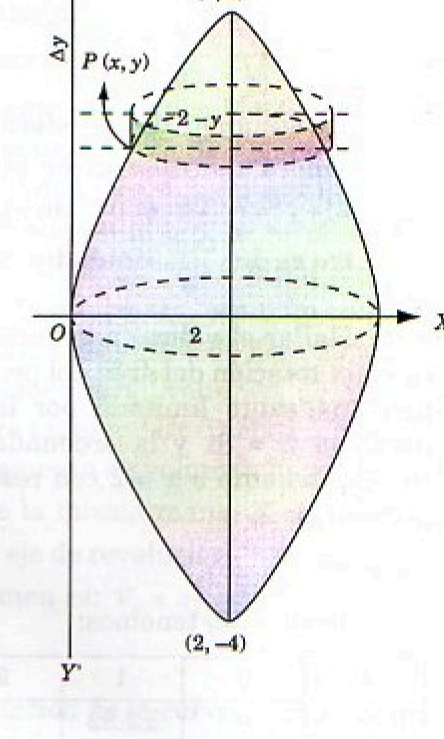
∴ **El volumen generado en la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto al eje X es de 16π unidades cúbicas.**

3. Hallar el volumen que se genera al girar el área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ alrededor de la ordenada correspondiente a $x = 2$.

Solución

Gráficamente, tenemos:

x	0	1	2
y	0	±2.82	±4



Dividiendo el área mediante franjas horizontales, cuando el rectángulo genérico gire alrededor del eje Y, se produce un disco de radio $2-x$, de altura Δy y de volumen $\pi(2-x)^2\,\Delta y$.

El volumen buscado es dos veces el volumen engendrado por $y^2 = 8x$, esto es:

$$V_y = 2\pi\int_a^b x^2dy = 2\pi\int_0^4 (2-x)^2dy$$

$$V_y = 2\pi\int_0^4\left(2-\frac{y^2}{8}\right)^2dy = 2\pi\int_0^4\left(4-\frac{4y^2}{8}+\frac{y^4}{6^4}\right)^2dy$$

$$V_y = 8\pi\int_0^4 dy - \pi\int_0^4 y^2dy + \frac{\pi}{32}\int_0^4 y^4dy$$

$$V_y = 8\pi y - \frac{\pi y^3}{3} + \frac{\pi y^5}{160}\Big]_0^4 = 32\pi - \frac{64\pi}{3} + \frac{1024\pi}{160} = \mathbf{\frac{256\pi}{15}}$$

∴ **El volumen generado al girar el área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ alrededor de la ordenada correpondiente a $x = 2$ es $\frac{256\pi}{15}$ unidades cúbicas.**

Volumen de un sólido de revolución hueco

Cuando una superficie plana gira alrededor de un eje situado en el mismo plano, y este eje no corta la superficie, se forma un sólido de revolución hueco.

Considerando el siguiente ejemplo, el sólido que se obtiene haciendo girar alrededor del eje de las X es el recinto $ACBDA$ de la Figura 3.

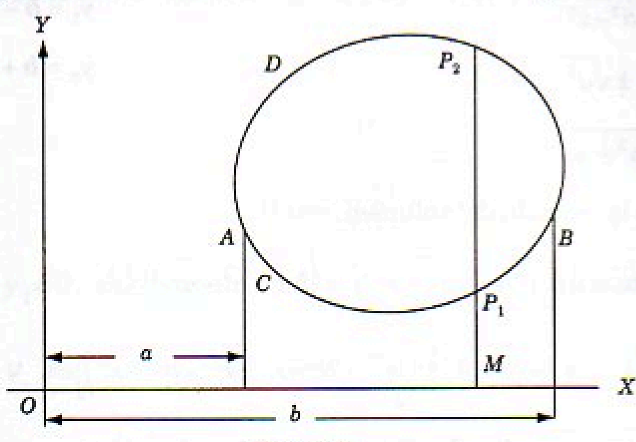


Figura 3

Hacemos pasar por el sólido un sistema de planos equidistantes perpendiculares al eje de revolución OX, donde Δx es la distancia entre uno y otro. Entonces el sólido se divide en placas circulares huecas de espesor Δx. Si uno de los planos que dividen el sólido pasa por M, la placa circular hueca con una base en este plano es, aproximadamente, un cilindro circular hueco cuyos radios interior y exterior son, respectivamente, MP_1 $(=y_1)$ y MP_2 $(=y_2)$. Por tanto, su volumen es: $\pi\,(y_2^2 - y_1^2)\,\Delta x$. Sean n cilindros huecos, con $b - a = n\,\Delta x$.

El límite de la suma de estos n cilindros huecos, cuando $n \to \infty$, es el volumen del sólido de revolución hueco. Entonces:

$$V_x = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx, \text{ siendo } y_2 > y_1$$

El elemento de volumen en $V_x = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx$ es un cilindro hueco con radio interior y_1, radio exterior y_2 y altura Δx. Los radios y_1 y y_2 son funciones de X ($= OM$) que se obtienen de las ecuaciones de las curvas que limitan (o la ecuación de la curva que limita) la superficie que gira.

EJEMPLOS

1. Calcular el volumen del sólido anular *(toro* o *argolla)* que se forma al hacer girar un círculo de radio a alrededor de un eje situado en su plano y exterior al círculo, que dista de su centro b unidades, con $b > a$.

Solución

Sea la ecuación del círculo: $x^2 + (y - b)^2 = a^2$.
Siendo el eje X el de revolución y despejando y, resulta:

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2$$

$$(y-b)^2 = a^2 - x^2$$

$$\pm\sqrt{(y-b)^2} = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(y-b) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\boldsymbol{y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen, resulta:

$$V_x = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \pi\int_{-a}^{a}\left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right]dx$$

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}\left[\left(b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2\right) - \left(b^2 - 2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2\right)\right]dx$$

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}\left(b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2 - b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 + x^2\right)dx$$

$V_x = \pi\int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4b\,\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$; aplicando la fórmula $\boxed{23}$ resulta:

$$V_x = 4b\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4b\,\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc sen}\frac{x}{2}\right]_{-a}^{a}$$

$$V_x = 2b\,\pi x\sqrt{a^{2-x^2}} + 2a^2b\,\pi \text{ arc sen}\frac{x}{a}\Big]_{-a}^{a}$$

$$V_x = \left[2b\pi(a)\sqrt{a^2 - (a)^2} + 2a^2b\pi \text{ arc sen}\frac{a}{a}\right] - \left[2b\pi(-a)\sqrt{a^2 - (-a)^2} + 2a^2b\pi \text{ arc sen}\left(\frac{-a}{a}\right)\right]$$

$$V_x = 2ab\pi\,(0) + 2a^2b\pi\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2ab\pi(0) - 2a^2b\pi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a^2b\pi^2 + a^2b\pi^2 = \boldsymbol{2a^2b\pi^2}$$

$\therefore$ **El volumen del sólido anular que se forma al hacer girar su círculo de radio a alrededor del eje X que dista de su centro b unidades es $2a^2b\pi^2$ unidades cúbicas.**

Un sólido de revolución puede dividirse en *cáscaras cilíndricas* haciendo pasar por él un sistema de cilindros circulares cuyo eje común es el eje de revolución. Si el área $ACBD$ de la Figura 3 gira alrededor del eje Y, puede obtenerse:

$V_y = 2\pi\int_a^b (y_2 - y_1)x\,dx$, con $OM = x$, $MP_1 = y_1$, $MP_2 = y_2$.

El elemento de volumen es ahora una *cáscara cilíndrica* de radio r, altura $y_2 - y_1$ y espesor Δx.

2. Calcular el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje X la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos: $ay^2 = x^3$, $y = 0$ y $x = a$.

Solución

Siendo el eje X el de revolución y despejando y de $ay^2 = x^3$, resulta:

$$ay^2 = x^3$$

$$y^2 = \frac{x^3}{a}$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

Puesto que $y_1 = 0$, al sustituir en la fórmula de volumen, resulta:

$$V_x = \pi\int_a^b \left(y_2^{\,2} - y_1^{\,2}\right) dx = \pi\int_0^a \left[\left(\sqrt{\frac{x^3}{a}}\right)^2 - 0\right] dx = \pi\int_0^a \left(\frac{x^3}{a}\right) dx$$

$$V_x = \frac{\pi}{a}\int_0^a x^3\, dx = \frac{\pi}{a}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{(a)^4\pi}{4a} = \frac{a^3\pi}{4}$$

∴ El volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje X la superficie limitada por $ay^2 = x^3$ y $y = 0$ es de $\frac{a^3\pi}{4}$ unidades cúbicas.

3. Calcular el volumen del sólido que se engendra haciendo girar alrededor del eje Y la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos: $2y^2 = x^3$, $y = 0$ y $x = 2$.

Solución

Si Y es el eje de revolución y despejamos y en $2y^2 = x^3$, resulta:

$$2y^2 = x^3$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2}$$

$$y^2 = \sqrt{\frac{x^3}{2}}$$

Puesto que $y_1 = 0$, sustituyendo en la fórmula de volumen, resulta:

$$V_y = 2\pi\int_a^b (y_2 - y_1)\, x\, dx = 2\pi\int_0^2 \left(\sqrt{\frac{x^3}{2}} - 0\right) x\, dx = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2 x^{5/2}\, dx$$

$$V_y = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{x^{7/2}}{7/2}\right)\right]_0^2 = \frac{4\pi x^{7/2}}{7\sqrt{2}}\Bigg]_0^2 = \frac{4\pi(2)^{7/2}}{7\sqrt{2}} = \frac{4\pi(8)}{7} = \frac{32\pi}{7}$$

∴ **El volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje Y la superficie limitada por $2y^2 = x^3$ y $y = 0$ es de $\frac{32\pi}{7}$ unidades cúbicas.**

EJERCICIO XXVI

I. Calcular el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje X la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos.

1. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2$
2. Una arcada de $y = \operatorname{sen} x$
3. Una arcada de $y = \cos 2x$
4. La hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
5. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5$
6. $y = xe^x,\ \ y = 0,\ x = 1$
7. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$
8. $y = x^2 - 6x,\ y = 0$
9. $9x^2 + 16y^2 = 144$
10. $y^2 = (2-x)^3,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
11. $y^2(4+x^2) = 1,\ \ y > 0,\ x = 0,\ x = \infty$
12. $(x-1)\ y = 2,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 5$
13. $y^2(2a-x) = x^3,\ y=0,\ x=a$

II. Calcular el volumen del sólido que se engendra haciendo girar alrededor del eje Y la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos.

1. $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0$
2. $9x^2 + 16y^2 = 144$
3. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2$
4. $y^2 = 9 - x,\ x = 0$
5. $x^2 = 16 - y,\ y = 0$
6. $y^2 = ax,\ y = 0,\ x = a$
7. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$
8. $ay^2 = x^3,\ y = 0,\ x = a$

III. Hallar el volumen generado en la rotación del área comprendido entre la curva correspondiente y el eje X con respecto a las siguientes rectas.

1. $y = 4x - x^2;\ y = 3$
2. $y^2 = x^3;\ x = 4$
3. $y = 9 - x^2;\ y = x + 33/4$
4. $xy = 6;\ x + y = 7$
5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1;\ x + y = 1$
6. $y = 3x - x^2;\ y = x$
7. $y = x^2;\ y = x$
8. $y = 2 + 3x - x^2;\ y = -4$
9. $y = 4x - x^2;\ y = 6$
10. $y = x^2 + 1;\ x - y + 3 = 0$

IV. Resolver los siguientes problemas.

1. Calcular el volumen que se engendra si la superficie limitada por la curva $y = \sec\dfrac{\pi x}{2}$, el eje de las X y las rectas $x=\pm 1/2$ gira alrededor del eje de las X.
2. Calcular el volumen del sólido engendrado haciendo girar una arcada de la *cicloide* $x = a\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$ y $y = a\,(1 - \cos\theta)$ alrededor de su base OX.
3. Si la arcada del problema anterior gira alrededor del eje Y, ¿cuál es el volumen?
4. Dada la curva $x=t^2$ y $y=4t-t^3$, hallar:
   a) El área del *lazo*.
   b) El volumen del sólido engendrado por la superficie interior del *lazo*, cuando gira alrededor del eje X.
5. Hágase girar alrededor de cada eje la superficie limitada por las dos parábolas $y^2 = 9x$ y $y^2 = 7 - x$. Calcular los volúmenes respectivos.
6. Hágase girar alrededor del eje polar la parte de la *cardioide* $r = 4 + 4\cos\theta$ que está entre las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 90°$. Calcular el volumen.
7. El área debajo de la curva $y = e^x\,\text{sen}\,x$, desde $x = 0$ hasta $x = 180$, gira alrededor del eje de las X. Calcular el volumen del sólido que se genera.
8. Calcular por integración el volumen del *cono truncado* que se engendra haciendo girar alrededor del eje X la superficie limitada por las rectas: $y=6-x$, $y=0$, $x=0$ y $x=4$. Comprobar el resultado por la fórmula geométrica.
9. Calcular el volumen del *esferoide achatado* que se engendra haciendo girar alrededor del eje Y la superficie limitada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
10. Utilizando las ecuaciones paramétricas de la *hipocicloide* $x = a\cos^3\theta$ y $y = a\,\text{sen}^3\theta$, calcular el volumen del sólido que se engendra haciéndola girar alrededor del eje X.

4.8 OBTENCIÓN DE VOLÚMENES DE SECCIÓN TRANSVERSAL

Áreas de superficies de revolución

La superficie de revolución se genera al hacer girar el arco CD de la curva $y = f($
alrededor del eje X, como se muestra en la Figura 1. Si se quiere medir el áre
de dicha superficie, utilizamos el teorema fundamental del cálculo integral.

Primer paso. Se divide el intervalo AB en subintervalos $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, etc., y
levantan ordenadas en los puntos de división. Se trazan las cuerdas CE, EF, et
de la curva. Cuando la curva gira, cada cuerda engendra la superficie lateral
un tronco de cono de revolución. *El área de la superficie de revolución se defi
como el límite de la suma de las áreas laterales de dichos conos truncados.*

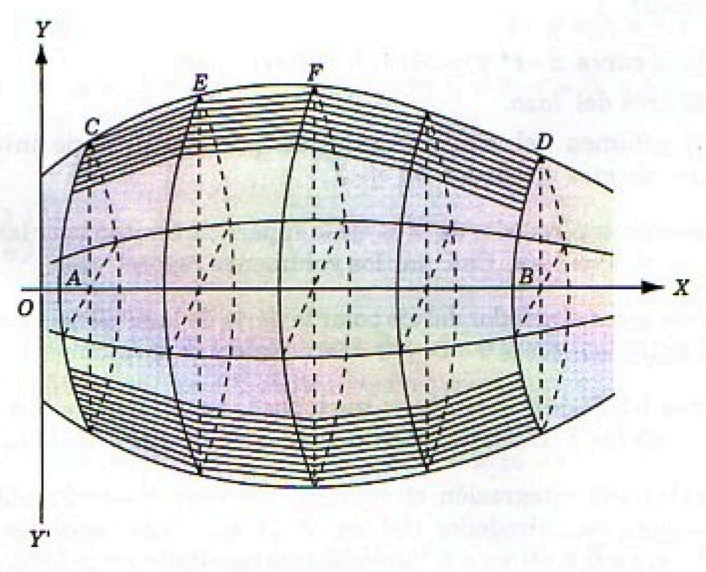


Figura 1

Segundo paso. Con el fin de tener mayor claridad de comprensión, tracemos
primer tronco de cono en tamaño más grande (Figura 2). Si M es el punto med
de la cuerda CE, entonces:

$$\text{Área lateral} = 2\pi\,(NM)\,(CE)$$

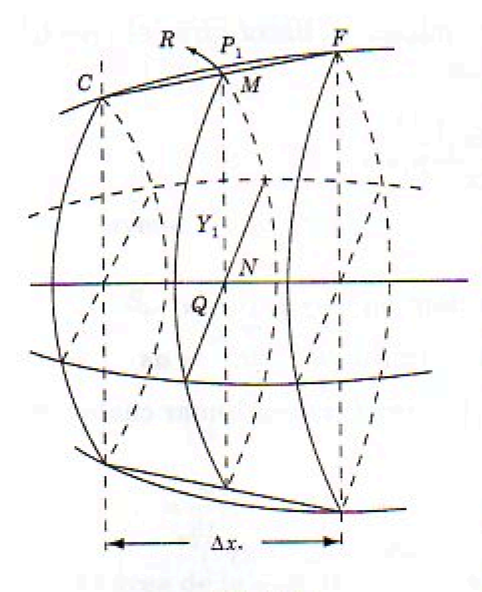


Figura 2

Aquí, el área lateral de un tronco de cono de revolución es igual a la circunferencia de la sección media multiplicada por el lado del tronco.

Para aplicar el teorema fundamental del cálculo integral, es necesario expresar este producto como función de la abscisa de algún punto del intervalo Δx_1. Empleando el teorema del valor medio, obtenemos la longitud de la cuerda CE, o sea:

$$CE = [1+f'(x_1)^2]^{1/2}\Delta x_1 \qquad ①$$

Aquí x_1 es la abscisa del punto $P_1(x_1, y_1)$, del arco CE, donde la tangente es paralela a la cuerda CE. Sea R el punto en que la recta horizontal trazada por M corta QP_1 (y_1), y designemos $RP_1 = \xi_1$, entonces:

$$NM = y_1 - \xi_1 \qquad ②$$

Sustituyendo ① y ② en la ecuación del área lateral, tenemos:

Área lateral $= 2\pi (y_1 - \xi_1) [1 + f'(x_1)^2]^{1/2}\Delta x_1$ *(Primer tronco de cono)*

De la misma manera:

Área lateral $= 2\pi (y_2 - \xi_2) [1 + f'(x_2)^2]^{1/2}\Delta x_2$ *(Segundo cono truncado)*

Continuando sucesivamente, tenemos:

Área lateral $= 2\pi (y_n - \xi_n) [1 + f'(x_n)^2]^{1/2}\Delta x_n$ *(Último tronco del cono)*

Por tanto, la suma de las áreas laterales de los conos truncados se escribe:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi (y_i - \xi_i)\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{1/2} \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi\, y_i\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{1/2} \Delta x_i - 2\pi\sum_{i=1}^{n} \xi_i\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{1/2} \Delta x_i$$

Tercer paso. Empleamos los límites $OA = a$ y $OB = b$, y aplicamos el teorema fundamental del cálculo integral en la siguiente suma:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, y_1\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{1/2} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi\, y\left[1 + f'(x)^2\right]^{1/2} dx$$

El límite para $-2\pi\sum_{i=1}^{n} \xi_1\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{1/2} \Delta x_i$ cuando $n \to \infty$ es igual a cero.

El área de la superficie de revolución engendrada al hacer girar el arco *CD* alrededor del eje *X* viene dada por la fórmula:

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx$$

donde S_x representa el área buscada.

La fórmula anterior también se puede escribir así: $S = 2\pi \int_a^b y\, ds$

Cuando el eje *Y* es el de giro empleamos la fórmula: $S_y = 2\pi \int_c^d x\, ds$

Para las fórmulas $S = 2\pi \int_a^b y\, ds$ y $S_y = 2\pi \int_c^d x\, ds$, ds puede tomar cualquiera de las tres siguientes formas:

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2} dy = \left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2}$$

De las tres formas anteriores, emplearemos la primera o la segunda, según sea la variable independiente que hayamos elegido; la tercera, si la curva dada está definida por ecuaciones paramétricas. Para utilizar cualquiera de las fórmulas para determinar el área de las superficies de revolución, es necesario calcular primeramente el valor de ds.

EJEMPLOS

1. El arco de la parábola cúbica $9y = x^3$, comprendido entre $x = 0$ y $x = 2$, gira alrededor del eje *X*. Hallar el área de la superficie de revolución que se engendra.

Solución

Primero calculamos la derivada de la función dada:

$$9y = x^3$$

$$y = \frac{x^3}{9} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{9} = \frac{x^2}{3}$$

Entonces el valor de ds, es:

$$ds=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}dx=\left[1+\left(\frac{x^2}{3}\right)^2\right]^{1/2}dx=\left(1+\frac{x^4}{9}\right)^{1/2}dx=\left(\frac{9+x^4}{9}\right)^{1/2}dx$$

$$\therefore\ \mathbf{ds=\frac{1}{3}\left(9+x^4\right)^{1/2}dx}$$

Sustituyendo en la fórmula del área, tenemos:

$$S_x=2\pi\int_a^b y\,ds=2\pi\int_0^2\left(\frac{x^3}{9}\right)\left[\frac{1}{3}\left(9+x^4\right)^{1/2}\right]dx=\frac{2\pi}{27}\int_0^2\left(9+x^4\right)^{1/2}x^3\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2\pi}{27}\right)\left.\frac{\left(9+x^4\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2=\frac{\pi}{81}\left[\left(9+x^4\right)^{3/2}\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{81}\left[9+(2)^4\right]^{3/2}-\frac{\pi}{81}\left[9+(0)^4\right]^{3/2}=\frac{125\pi}{81}-\frac{27\pi}{81}=\mathbf{\frac{98\pi}{81}}$$

∴ **El área de la superficie de revolución que se engendra por el arco de la parábola cúbica $9y = x^3$, comprendido entre $x=0$ y $x=2$, y que gira alrededor del eje X, es de $98\pi/81$ unidades cuadradas.**

2. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada al hacer girar la *cicloide* cuyas ecuaciones paramétricas son $x = a\ (\theta - \text{sen}\ \theta)$ y $y = a(1 - \cos\theta)$ alrededor del eje X.

Solución

Primeramente calculamos la *diferencial* de la cicloide:

$$x = a\ (\theta - \text{sen}\ \theta) \qquad y = a\ (1 - \cos\theta)$$

$$dx = a\ (1 - \cos\theta)\ d\theta \qquad dy = a\ \text{sen}\ \theta\ d\theta$$

Entonces el valor de ds es:

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = ([a\ (1 - \cos\theta)\ d\theta]^2 + [a\ \text{sen}\ \theta\ d\theta])^{1/2}$$
$$= [a^2(1 - \cos\theta)^2\ d^2\theta + a^2\ \text{sen}^2\theta\ d^2\theta]^{1/2}$$
$$= (a^2\ [(1 - \cos\theta)^2 + \text{sen}^2\theta]\ d^2\theta)^{1/2}$$
$$= a(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)^{1/2}\ d\theta$$

Por la identidad trigonométrica $\mathbf{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$, tenemos:

$$ds = a(1 - 2\cos\theta + 1)^{1/2}\ d\theta = a(2 - 2\cos\theta)^{1/2}\ d\theta = a\ \sqrt{\mathbf{2}}\,(\mathbf{1 - cos}\,\theta)^{1/2}\,d\theta$$

Sustituyendo en la fórmula del área, tenemos:

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\ ds = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\,a\sqrt{2}\,(1-\cos\theta)^{1/2}d\theta$$
$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^{3/2}d\theta$$

Aplicamos la identidad trigonométrica $\mathbf{2\,sen^2\frac{\theta}{2} = 1 - cos\,\theta}$ y tenemos:

$$S_x = 2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^{3/2}\,d\theta = 2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^{3/2}d\theta$$

$$S_x = 2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^3}\,d\theta = 2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{8\,\text{sen}^6\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$S_x = 2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\,\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

Aplicando el método de integración para productos de potencias impares de senos y cosenos (caso I), resulta:

$$S_x = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\,d\theta = -16\pi a^2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{16\pi a^2\cos^3\frac{\theta}{2}}{3}\Bigg]_0^{2\pi}$$

$$S_x = \left[-16\pi a^2\cos\frac{(2\pi)}{2} + \frac{16\pi a^2\cos^3\frac{(2\pi)}{2}}{3}\right] - \left[-16\pi a^2\cos\frac{(0)}{2} + \frac{16\pi a^2\cos^3\frac{(0)}{2}}{3}\right]$$

$$S_x = \left[-16\pi a^2(-1) + \frac{16\pi a^2(-1)}{3}\right] - \left[-16\pi a^2(1) + \frac{16\pi a^2(1)}{3}\right]$$

$$S_x = 16\pi a^2 - \frac{16\pi a^2}{3} + 16\pi a^2 - \frac{16\pi a^2}{3} = 32\pi a^2 - \frac{32\pi a^2}{3} = \mathbf{\frac{64\pi a^2}{3}}$$

∴ **El área de la superficie de revolución engendrada al hacer girar la cicloide $x = a\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$ y $y = a\,(1 - \cos\theta)$ alrededor del eje X es de $\frac{64\pi a^2}{3}$ unidades cuadradas.**

3. Calcular el área de la superficie que se engendra cuando el arco de la parábola $y = x^2$, desde $y = 0$ a $y = 2$, gira alrededor del eje Y.

Solución

Para empezar calculamos la derivada de la función dada:

$$y = x^2$$

$$x = \sqrt{y} \qquad \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Entonces el valor de ds es:

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2}dy = \left[1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2\right]^{1/2}dy = \left(1 + \frac{1}{4y}\right)^{1/2}dy$$

$$ds = \left(\frac{4y+1}{4y}\right)^{1/2} dy = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\frac{\mathbf{4y+1}}{\mathbf{y}}}\,\mathbf{dy}$$

Sustituimos en la fórmula del área:

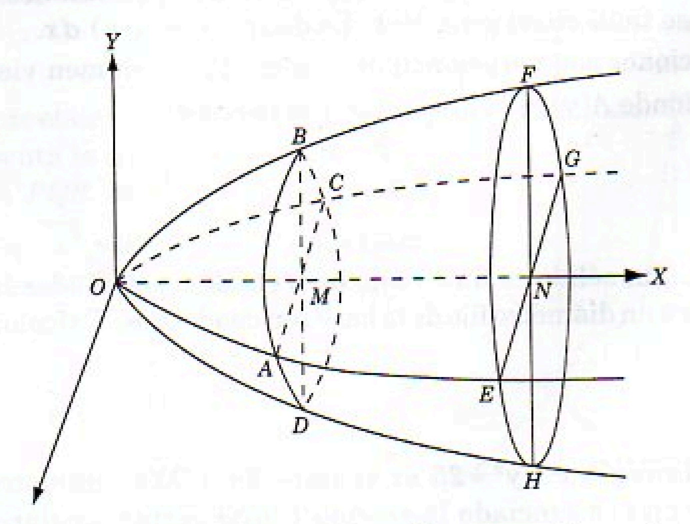
$$S_y = 2\pi\int_c^d x\,ds = 2\pi\int_0^2 \sqrt{y}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4y+1}{y}}\right)dy = \pi\int_0^2 \sqrt{4y+1}\,dy$$

$$S_y = \frac{\pi(4y+1)^{3/2}}{6}\Bigg]_0^2 = \frac{\pi[4(2)+1]^{3/2}}{6} - \frac{\pi[4(0)+1]^{3/2}}{6} = \frac{27\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{\mathbf{13\pi}}{\mathbf{3}}$$

∴ **El área de la superficie que se engendra cuando el arco de la parábola $y = x^2$, desde $y = 0$ a $y = 2$, gira alrededor del eje Y es de $\frac{16\pi}{3}$ unidades cuadradas.**

Volúmenes de sección transversal

Considerando la Figura 3, todas las secciones transversales por planos perpendiculares al eje X son círculos. Si $OM = x$ y $MB = y$, entonces el área de la sección transversal $ABCD=\pi y^2=\pi[\phi(x)]^2$, si $y=\phi(x)$ es la ecuación de la curva engendradora OBF. Por tanto, el área de la sección transversal por cualquier plano perpendicular a OX es una función de su distancia (= x) al punto O.



Siempre que sea posible expresar el área de una sección cualquiera del sólido, que sea perpendicular a una recta fija (como el eje X), se hará como una función de su distancia a un punto fijo (como el origen O).

Se divide el sólido en n rebanadas, cada una de espesor Δx, por secciones equidistantes perpendiculares al eje X. Sea EDF una cara de una de las rebanadas y sea $ON=x$ (Figura 4), entonces, por hipótesis:

$$\text{Área } (EDF) = A(x)$$

El volumen de esta rebanada es igual, aproximadamente, a:

$$\text{Área } (EDF)\ \Delta x = A(x)\ \Delta x$$

(base × altura).

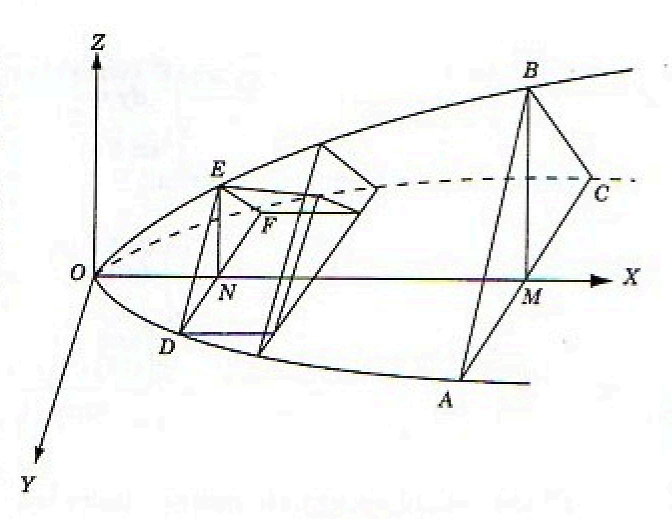


Figura 4

Entonces: $\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i$ *representa la suma de los volúmenes de todos esos prismas.*

Es cierto que el volumen pedido es el límite de esta suma; por tanto, y de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i = \int_{\alpha}^{\beta} A(x)\,dx \text{, por lo tanto, resulta: } \boldsymbol{V = \int_{\alpha}^{\beta} A(x)\,dx}$$

El elemento de volumen es un prisma (otras veces es un cilindro) cuya altura es dx y cuya base tiene como área $A(x)$. Es decir, $dv = A(x)\ dx$.

Si las secciones son perpendiculares al eje Y, el volumen viene dado por $V = \int_{\gamma}^{\delta} A(y)\,dy$, donde $A(y)$ es el área de la sección en y.

EJEMPLOS

1. La base de un sólido es un círculo de 5 cm de radio. Todas las secciones *perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadrados. Calcular el volumen* del sólido.

Solución

Sea la base el círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el plano XY y OX el diámetro fijo (Figura 5). Con base en el enunciado la sección $PSRQ$ perpendicular a OX es un cuadrado, cuya área es $4y^2$, si $PQ = 2y$. De la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, tenemos que $y^2 = 25 - x^2$; el área de la sección $PSRQ$ que representamos con $A(x)$ es igual a $4y^2$, es decir, $4(25 - x^2)$.

Aplicamos la fórmula de volumen, y tenemos:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} A(x)\,dx = \int_{-5}^{5} 4\left(25 - x^2\right) dx$$

$$V = 100\int_{-5}^{5} dx - 4\int_{-5}^{5} x^2 dx = 100x - \frac{4x^3}{3}\Bigg]_{-5}^{5}$$

$$V = \left[100\,(5) - \frac{4(5)^3}{3}\right] - \left[100\,(-5) - \frac{4(-5)^3}{3}\right]$$

$$= 500 - \frac{500}{3} + 500 - \frac{500}{3} = \mathbf{\frac{2000}{3}}$$

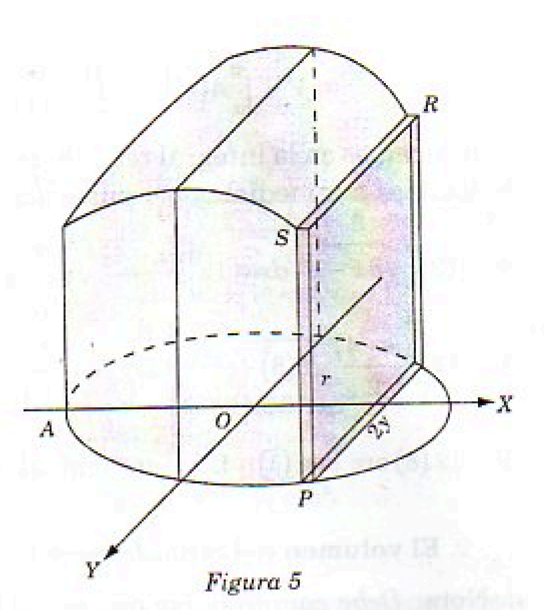


Figura 5

$\therefore$ El volumen del sólido es de $\frac{2000}{3}$ cm³.

2. Calcular el volumen de un *conoide recto* de 12 cm de altura (h), cuya base es el círculo $x^2 + y^2 = 8x$ de 4 cm de radio (r).

Solución

Con base en la Figura 6, consideremos una sección PQR perpendicular al eje OX; dicha sección es un triángulo isósceles, donde $RM = y$, es decir:

$$RM = \sqrt{8x - x^2}$$

Dicho valor se obtiene de la ecuación $x^2 + y^2 = 8x$ que representa la circunferencia $ORAQ$. En la sección PQR se observa que la base $RQ = 2y = 2\sqrt{8x - x^2}$ y la altura $MP = h = 12$cm; entonces el área de dicha sección es:

$$A(x) = \frac{(base)\,(altura)}{2} = \frac{\left(2\sqrt{8x - x^2}\right)(12)}{2}$$

$$= 12\sqrt{8x - x^2}$$

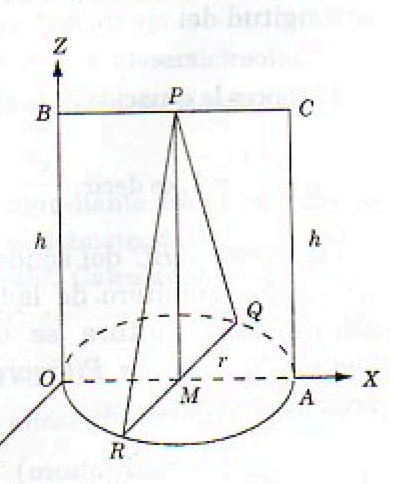


Figura 6

Aplicando la fórmula de volumen, tenemos:

$$V=\int_\alpha^\beta A(x)\,dx=\int_0^{2r}12\sqrt{8x-x^2}\;dx=12\int_0^8\sqrt{8x-x^2}\;dx$$

Aplicamos en la integral resultante el primer método para resolver integrales reducibles a inmediatas por sustitución algebraica, y resulta:

$$V=12\int_0^8\sqrt{8x-x^2}\;dx=12\left[\frac{(x-4)}{2}\sqrt{8x-x^2}+8\text{ arc sen}\right]_0^8$$

$$V=12\left[\frac{(8-4)}{2}\sqrt{8(8)-(8)^2}\;8\text{ arc sen}\frac{(8-4)}{4}\right]-12\left[\frac{(0-4)}{2}\sqrt{8(0)-(0)^2}+8\text{ arc sen}\frac{(0-4)}{4}\right]$$

$$V=12\,(8)\text{ arc sen}(1)-12(8)\text{ arc sen}(-1)=96\left(\frac{\pi}{2}\right)+96\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{96\pi}$$

∴ **El volumen del *conoide recto* es de 96π cm³.**

Nota: *Debe comprobarse que el volumen del conoide debe ser la mitad del volumen del cilindro de las mismas base y altura.*

3. La base de un sólido tiene la forma de una elipse con el eje mayor de 20 cm y eje menor de 10 cm. Calcular el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje mayor es un triángulo equilátero.

Solución

Situemos la elipse como indica la Figura 7; sea $2a$ la longitud del eje mayor, cuyo valor es de 20 cm, por lo que se deduce que $a=10$; de igual manera, sea $2b$ la longitud del eje menor, cuyo valor es de 10 cm, por lo que $b=5$.

Entonces la ecuación de la elipse es:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, es decir: $\mathbf{\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1}$

La sección ABC del sólido es un triángulo equilátero de lado $2y$ y altura $\sqrt{3y}$ (la altura se obtiene por el *Teorema de Pitágoras*). El área del triángulo es:

$$A(x)=\frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$$

$$A(x)=\frac{(2y)\left(\sqrt{3}\;y\right)}{2}=\sqrt{3}y^2$$

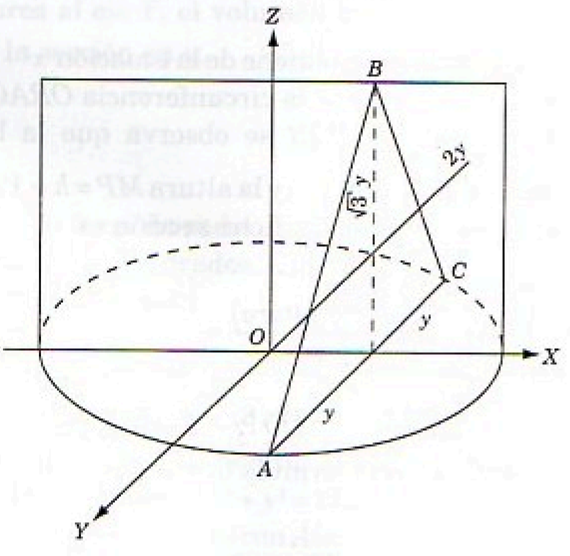


Figura 7

Por la ecuación de la elipse:

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$, obtenemos: $y=\frac{\sqrt{100-x^2}}{2}$

Por tanto, el área de la sección ABC es: $A(x)=\sqrt{3}\left(\frac{100-x^2}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(100-x^2\right)$.

Aplicando la fórmula del volumen, tenemos:

$$V=\int_\alpha^\beta A(x)\,dx=\int_{-10}^{10}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(100-x^2\right)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}(100)x-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-10}^{10}$$

$$V=\left[25\sqrt{3}(10)-\frac{\sqrt{3}\ (10)^3}{12}\right]-\left[25\sqrt{3}\,(-10)-\frac{\sqrt{3}\,(-10)^3}{12}\right]=\mathbf{577.35\ cm^3}$$

∴ **El volumen del sólido en forma de elipse es de 577.35 cm³.**

EJERCICIO XXVII

I. Resolver los siguientes problemas.

1. Calcular el volumen del cono cuya base está limitada por la circunferencia $x^2+y^2=4$ y cuyas secciones perpendiculares al eje X son:

   a) triángulo equilátero. b) semicírculo. c) cuadrado.

   d) triángulo isósceles con hipotenusa en la base del sólido.

2. La base de un sólido está acotada por $y=x^3$, $y=0$ y $x=1$. Calcular su volumen si sus secciones perpendiculares al eje Y son:

   a) cuadrado. b) triángulo equilátero. c) semicírculo.

   d) trapecio con $h=b_1=\frac{1}{2}b_2$, donde b_1 y b_2 son las longitudes de las bases superior e inferior, respectivamente.

3. De un cilindro de 5 cm de radio se corta una cuña mediante dos planos; uno es perpendicular al eje del cilindro, y el otro pasa por un diámetro de la sección hecha por el primer plano y forma con éste un ángulo de 45°. Calcular el volumen de la cuña.

4. Un pajar tiene 100 m de largo y 40 m de ancho en su base. Sus secciones forman parábolas $y=40-\frac{x^2}{10}$. Calcular su capacidad de almacenamiento.

5. Calcular el volumen del sólido cuya base está acotada por $f(x)=1-\frac{x}{2}$, $g(x)=-1$ y $x=0$, y cuyas secciones perpendiculares al eje X son triángulos equiláteros.

6. Un sólido tiene una base en forma de elipse cuyos ejes mayor y menor miden 10 y 8 cm, respectivamente. Calcular su volumen sabiendo que toda sección del mismo plano perpendicular al eje mayor es un triángulo isósceles de altura igual a 6 cm.
7. Calcular el volumen de la intersección de dos cilindros circulares de igual radio (r) que se cortan ortogonalmente.
8. Calcular el volumen de un sólido sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje X es un círculo cuyos extremos de un diámetro se apoyan en las parábolas $y^2 = 9x$ y $x^2 = 9y$.
9. Calcular el volumen de un sólido de base elíptica de ejes mayor y menor iguales a 12 y 10 cm, respectivamente, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje mayor es un triángulo rectángulo con un cateto en el plano de la base.
10. Un sólido tiene base circular de radio r. El segmento PQ es un diámetro de la base. Calcular el volumen del sólido si cada sección plana perpendicular a PQ es:

    a) un triángulo equilátero.
    b) un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa está en el plano de la base.
    c) un triángulo isósceles con cateto en el plano de la base.
    d) un triángulo isósceles con altura igual a su base.
    e) un triángulo isósceles de 20 cm de altura.

11. *La base de un sólido es el segmento parabólico obtenido al cortar la curva con una* cuerda perpendicular a su eje. La cuerda tiene 16 cm de largo y dista 8 cm del vértice de la parábola. Calcular el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje de la base es:

    a) un triángulo equilátero.
    b) un cuadrado.
    c) un triángulo isósceles de 10 cm. de altura.

12. Un círculo de radio a se mueve de manera que su centro describe una circunferencia de igual radio, mientras que su plano se mantiene paralelo a un plano dado que es perpendicular al plano del círculo dado. Calcular el volumen del sólido que se engendra.
13 Un rectángulo se mueve desde un punto fijo. Un lado del rectángulo es siempre igual a la distancia de este punto, y el otro es igual al cuadrado de esta distancia. ¿Qué volumen se engendra cuando el rectángulo se mueve 2 metros?

14. Un balón de futbol americano tiene 16 pulgadas de largo y una sección plana que contiene una costura es una elipse cuyo diámetro menor es de 8 pulgadas. Calcular el volumen:

    a) Si el cuero está tan estirado que cada sección transversal es un cuadrado.
    b) Si la sección transversal es un círculo.

15 La base de un sólido tiene la forma de una elipse con eje mayor de 18 cm y eje menor de 9 cm. Calcular el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje mayor es:

    a) un cuadrado. c) un triángulo isósceles de 9 cm de altura.
    b) un triángulo equilátero.

16. Un triángulo equilátero variable se mueve de manera que su plano se mantiene perpendicular al eje X, mientras que los vértices de su base se apoyan sobre las curvas $y^2 = 16ax$ y $y^2 = 4ax$, situadas por encima del eje X. Calcular el volumen que el triángulo engendra cuando se mueve del origen a los puntos cuya abscisa es a.

17. Calcular el volumen de un sólido cuya base es el área limitada por la parábola $y^2 = 12x$ y su ordenada correspondiente al punto $X=3$, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje X de la parábola es un cuadrado.

18. Calcular el volumen de un sólido cuya base es el área del primer cuadrante limitada por la recta $4x + 5y = 20$ y los ejes coordenados, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje X es un semicírculo.

19. En una esfera de 3 cm de radio se realiza un taladro de 1 cm de radio, siendo el eje de éste uno de los diámetros de aquélla. Calcular el volumen de la esfera que resulta.

II. Hallar los volúmenes limitados por las siguientes superficies de segundo grado y los planos dados.

1. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$
2. $x^2 + 4y^2 = 1 + z^2$; $z + 1 = 0$; $z - 1 = 0$
3. $z = x^2 + 4y^2$; $z = 1$
4. $z^2 = x^2 + 9y^2$; $z + 1 = 0$
5. $25y^2 + 9z^2 = 1 + x^2$; $x = 0$; $x = 2$
6. $4x^2 + 9z^2 + y = 0$; $y + 1 = 0$

4.9 OBTENCIÓN DE CENTROS DE GRAVEDAD DE SUPERFICIES PLANAS

Momento para un sistema lineal

El *momento* que produce una cierta masa respecto del punto E se define así:

Momento = (masa) (brazo del momento)

Aquí el *brazo del momento* es la distancia de la masa al punto E.

Para comprender la definición anterior, supongamos que en un columpio un niño A de 24 kg de peso se sienta 2 .5 m a la izquierda del centro de apoyo E y otro niño B, de 30 kg, se sienta 2 .5 m a la derecha de E (Figura 1).

Por observación, se deduce que el columpio comenzará a girar en un plano vertical, es decir, de acuerdo con el giro de las manecillas del reloj en torno al punto E. Esto se debe a que el niño A de la izquierda tiene un peso menor que el niño B de la derecha.

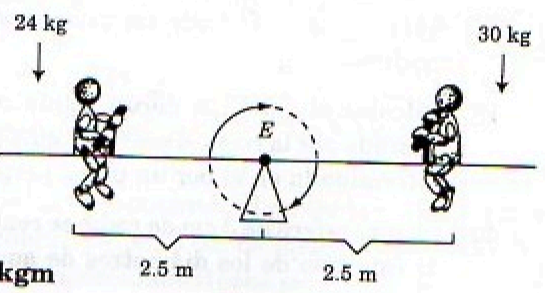


Figura 1

Momento en A = (24 kg)(2.5 m) = **60 kgm**

Momento en B = (30 kg)(92.5 m) = **75 kgm**

Para que el columpio quede en equilibrio, es necesario que ambos momentos sean iguales. Entonces, si el niño B de 30 kg se sienta a 2 m de distancia de E, en ese instante se nivelará el columpio, ya que:

Momento en A = (24 kg) (2.5 m) = **60 kgm**

Momento en B = (30 kg) (2m) = **60 kgm**

Si ubicamos el origen O en E y definimos las coordenadas $x_1 = -2.5$, $x_2 = 2$, el columpio quedará en equilibrio, debido a que el momento total resultante de ambas masas es *nulo* respecto del origen. En otras palabras:

Momento en O $= m_1 x_1 + m_2 x_2 = (24)(-2.5) + (30)(2) = -60 + 60 = 0$

De manera general, supongamos varias masas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, colocados a lo largo del eje X en los puntos respectivos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (Figura 2).

En tal situación la medida de la tendencia del sistema a girar alrededor del origen O se denomina *momento del sistema respecto del origen*, y se representa así:

Figura 2

$$M_o = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots + m_nx_n = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i$$

Si el momento es igual a cero, se dice que el sistema está en *equilibrio*.

Ahora, al considerar un sistema que no está en equilibrio y al mover el punto de apoyo a un cierto $x = \bar{x}$ de modo que el sistema ya quede en equilibrio, lo anterior da lugar a:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i - \bar{x}\right) = m_1\left(x_1 - \bar{x}\right) + m_2\left(x_2 - \bar{x}\right) + m_3\left(x_3 - \bar{x}\right) + \ldots + m_n\left(x_n - \bar{x}\right) = 0$$

Es decir: $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{x} = 0$

Despejando $\bar{x}$ obtenemos: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}} = \dfrac{M_o}{m} = \dfrac{\begin{pmatrix}\textit{momento del sistema}\\ \textit{respecto del origen}\end{pmatrix}}{(\textit{masa total del sistema})}$

Al punto $\bar{x}$ de equilibrio se le denomina *centro de masa* o *centro de gravedad* del sistema.

EJEMPLO

1. Hallar el centro de gravedad para el siguiente sistema lineal: $m_1 = 16$, $x_1 = -7$; $m_2 = 19$, $x_2 = 3$; $m_3 = 11$, $x_3 = 8$; $m_4 = 14$, $x_4 = 10.5$.

Solución

Determinemos primeramente el momento del sistema respecto del origen, y resulta:

$$M_o = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4$$

$M_o = (16)(-7) + (19)(3) + (11)(8) + (14)(10.5) = -112 + 57 + 88 + 147 = \mathbf{180}$

La masa total del sistema es: $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 16 + 19 + 11 + 14 = \mathbf{60}$

Sustituyendo en la fórmula del centro de masa, resulta: $\overline{x} = \dfrac{M_o}{m} = \dfrac{180}{60} = 3$

$\therefore$ **El centro de masa del sistema dado es $\overline{x} = 3$.**

Momento para un sistema bidimensional

Considerando las masas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, colocadas en un plano cartesiano sobre los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$, respectivamente (Figura 3). Para tal sistema, tenemos que sus momentos son:

Momento M_x respecto al eje X:

$$M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots + m_n \; y_n$$

Momento M_y respecto al eje Y:

$$M_y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n$$

La masa total del sistema es:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n$$

El centro de masas $(\overline{x}, \overline{y})$ se obtiene con las fórmulas:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$

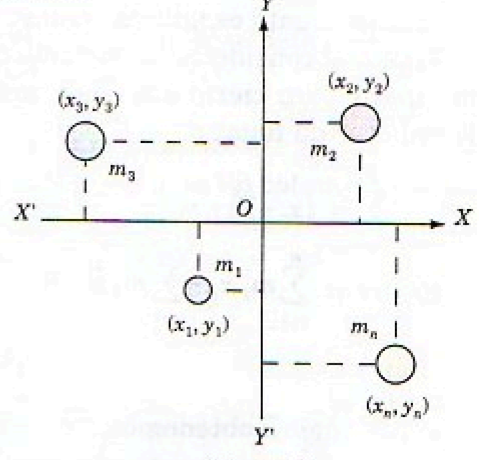


Figura 3

Lo anterior se interpreta como que la masa total m colocada en el centro de masas $(\overline{x}, \overline{y})$ producirá los mismos momentos totales M_x, M_y que el sistema en cuestión.

EJEMPLO

Hallar el centro de masas de un sistema constituido por las masas $m_1 = 13$, $m_2 = 8$, $m_3 = 6$ y $m_4 = 11$, colocadas en los puntos $(5, -3)$, $(1, 2)$, $(-8, 4)$ y $(-4, -7)$, respectivamente.

Solución

El momento M_x respecto al eje X es:

$$M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 = (13)(-3) + (8)(2) + (6)(4) + (11)(-7) = \mathbf{-76}$$

El momento M_y respecto del eje Y es:

$$M_y = m_1 x_1 = m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = (13)(5) + (8)(1) + (6)(-8) + (11)(-4) = \mathbf{-19}$$

La masa total del sistema es: $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 13 + 8 + 6 + 11 = 38$

Por tanto: $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{-19}{38} = -0.5 \qquad \bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{-76}{38} = -2$

∴ **El centro de masas del sistema dado es (–0.5, –2).**

Momentos de una superficie

Consideremos ahora una placa plana de material (lámina o cartón) cuya masa total está distribuida uniformemente por la placa, es decir, su *densidad* es la misma en todos sus puntos (*realmente la placa sería tridimensional, pero la consideraremos como una superficie*). Si sabemos que el punto de equilibrio de una lámina circular es su centro y que el de una superficie rectangular es su centro geométrico, definiremos el centro de masa ($\bar{x}, \bar{y}$) de una lámina como el punto de equilibrio de un sistema finito de partículas.

Considerando la Figura 4, se tiene una lámina de *densidad* constante ρ. El rectángulo representativo se ha obtenido subdividiendo el intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos de acuerdo con Δx; representemos el centro de masa del i-ésimo rectángulo con el punto (x_i, y_i) y aplicando la fórmula del punto medio; así tenemos:

$$y_i = \frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}$$

La masa del i-ésimo rectángulo es: masa= (densidad) (área) = $\rho(\Delta A_i)$:

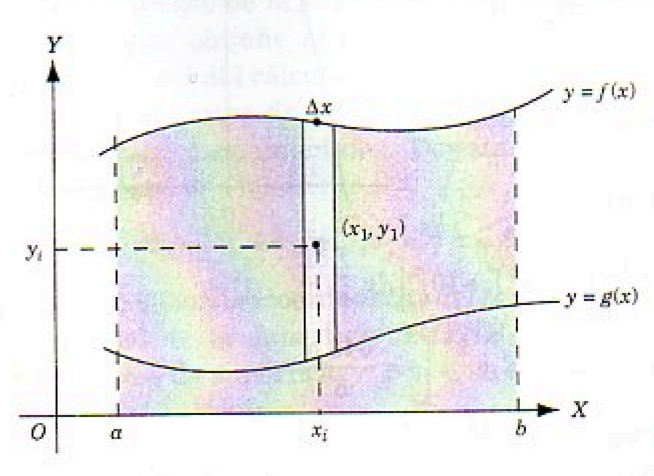


Figura 4

$$\textbf{masa} = \rho\,[f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x$$

La masa total de la superficie se puede estimar con:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \rho[f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x$$

Tomando el límite para $||\Delta|| \to 0\,(n \to \infty)$, obtenemos la definición de masa con:

$$m = \rho\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \rho A$$

Aquí A es el área de la lámina.

El momento respecto del eje X del i-ésimo rectángulo es:

momento = (masa) (brazo del momento) = $(\rho\Delta A_i)\, y_i = \rho(y_i)\,(\Delta A_i)$

$$\text{Momento} = \rho\left[\frac{f(x_i)+g(x_i)}{2}\right]\left[f(x_i)-g(x_i)\right]\Delta x = \rho/2\left[f(x_i)^2-g(x_i)^2\right]\Delta x$$

Sumando todos esos momentos y haciendo $n \to \infty$, obtenemos el momento respecto del eje X definido por:

$$\boldsymbol{M_x} = \rho/2\int_a^b\left[\boldsymbol{f(x)^2 - g(x)^2}\right]\boldsymbol{dx}$$

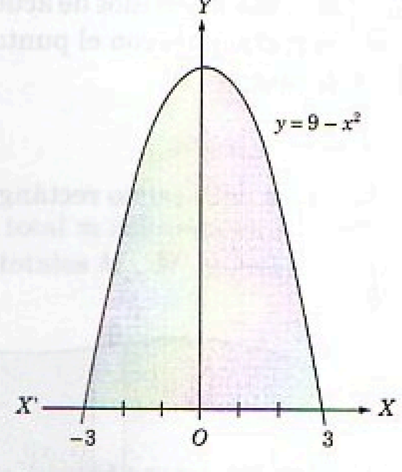
Asimismo, el momento respecto del eje Y es: $\boldsymbol{M_y} = \rho/2\int_a^b \boldsymbol{x}\left[\boldsymbol{f(x)-g(x)}\right]\boldsymbol{dx}$

Obviamente que el centro de masa es: $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$.

EJEMPLO

1. Hallar el centro de masa de la lámina de densidad uniforme ρ limitada por $y = 9 – x$ y el eje X.

Solución



Hacemos la gráfica (derecha) de $y = 9 - x^2$.

Calculando la masa total, tenemos:

$$m = \rho\int_{-3}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]dx = \rho\int_{-3}^{3}\left[(9-x^2)-(0)\right]dx$$

$$m = \rho\int_{-3}^{3}\left[(9-x^2)\right]dx = \rho\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \mathbf{36}\,\rho$$

El momento respecto del eje X es:

$$M_x = \rho/2\int_a^b\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx = \rho/2\int_{-3}^{3}\left[(9-x^2)^2-(0)^2\right]dx$$

$$M_x = \rho/2\int_{-3}^{3}\left(81-18x^2+x^4\right)dx = \rho/2\left[81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-3}^{3} = \frac{\mathbf{648}\,\rho}{\mathbf{5}}$$

El momento respecto del eje Y es:

$$M_y = \rho/2\int_a^b x\left[f(x)-g(x)\right]dx = \rho/2\int_{-3}^{3} x\left[(9-x^2)-(0)\right]dx$$

$$M_y = \rho/2\int_{-3}^{3}\left(9x - x^3\right)dx = \rho/2\left[\frac{9x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-3}^{3} = \mathbf{0}$$

El centro de masa es: $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{0}{36\rho} = \mathbf{0}$ y $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{648\rho}{5}}{36\rho} = \mathbf{\frac{18}{5}}$

∴ **El centro de la masa de la lámina dada es (0, 18/5).**

Nota: *Debemos tener presente que el centro de masa de una lámina uniforme sólo depende de la forma de ésta, no de su densidad.*

En general, si una figura plana tiene un centro de simetría, ese punto es el centro de gravedad. Además, si una figura plana tiene un eje de simetría, el centro de gravedad estará en ese eje.

Generalizando, a la fórmula del centro de masas de una lámina cuando se calcula el centro de una región *sin masa* del plano se le denomina *centroide* o *centro de gravedad* de esa región. Con base en la Figura 5, observamos la superficie *AMPNB* que se divide en n rectángulos, cada uno con base Δx. Sean dA su área y $C(h, k)$ las coordenadas de su centro de gravedad.

Entonces $dA = y\,dx$, $h = x$ y $k = 1/2\,y$.

El momento de la superficie de este rectángulo básico con respecto a OX (también OY) es el producto de su área por la distancia de su centro de gravedad a OX (también OY). Si dichos momentos son respectivamente dM_x y dM_y, entonces:

$$dM_x = k\,dA \quad \text{y} \quad dM_y = h\,dA$$

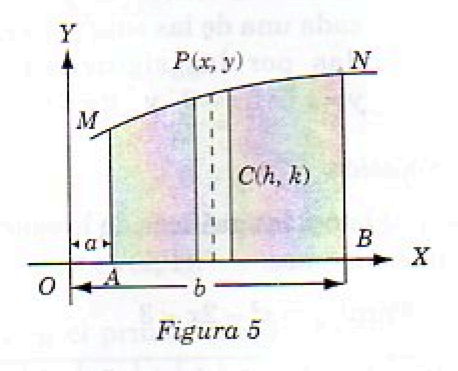


Figura 5

El momento de la superficie de la figura *AMPNB* se obtiene al aplicar el teorema fundamental del cálculo integral a la suma de los momentos de las superficies de los rectángulos fundamentales. De esta manera se tiene:

$$M_x = \int k\,dA \quad \text{y} \quad M_y = \int h\,dA$$

Si $(\bar{x}, \bar{y})$ son las coordenadas del centro de gravedad de la superficie *AMPNB* y A es su área, las relaciones entre los momentos de superficie y $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se expresan con:

$$A\bar{x} = M_y \quad \text{y} \quad A\bar{y} = M_x$$

Con el fin de calcular $(\bar{x}, \bar{y})$, hallaremos los momentos M_x y M_y.

Según $dA = y\,dx$; $h = x$, $k = \frac{1}{2}y$ y $M_x = \int k\,dA$, $M_y = \int h\,dA$, éstos son, para la superficie $AMPNB$:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right] dx \text{ y } M_y = \int_a^b xy\,dx = \int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Aquí debe sustituirse el valor de y en función de x deducido de la ecuación de la curva MPN de la Figura 5.

Si se conoce el área A, entonces de $A\bar{x} = M_y$, $A\bar{y} = M_x$, tenemos:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right]dx}{A} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx}{A}$$

Si los rectángulos fundamentales de la curva son respecto del eje Y, tenemos:

$C(h,k)$, $h = 1/2\,x$, $k = y$; $dM_x = k\,dA$, $dM_y = h\,dA$; $M_x = \int k\,dA$, $M_y = \int h\,dA$;

$A\bar{x} = M_y$, $A\bar{y} = M_x$; $M_x = \int_a^b xy\,dy$, $M_y = 1/2\int_a^b x^2\,dy$; $\bar{x} = \frac{M_y}{A}$, y $\bar{y} = \frac{M_x}{A}$.

EJEMPLOS

1. Hallar el centro de gravedad de cada una de las superficies limitadas por las siguientes curvas $y = x^2 - 2x - 3$ y $y = 6x - x^2 - 3$.

Solución

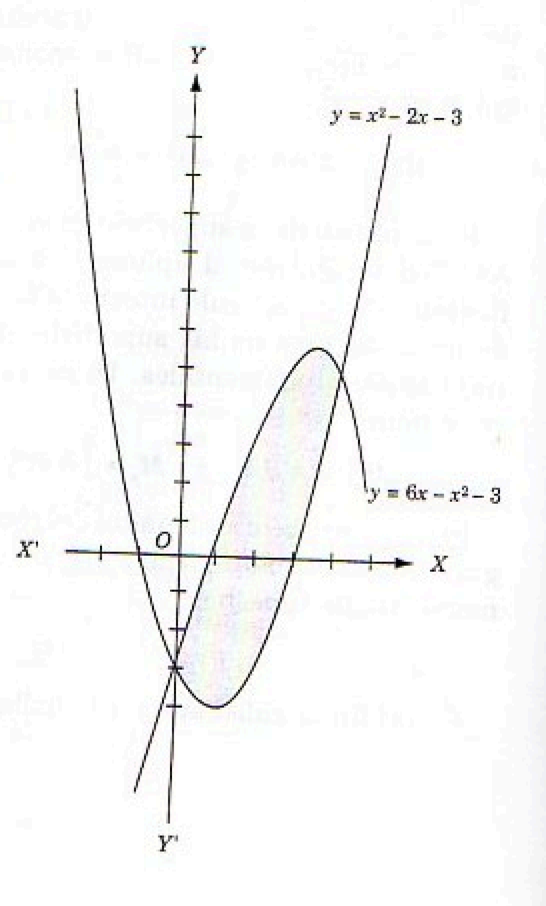
Al hacer las gráficas de las curvas dadas, tenemos:

Para: $y = x^2 - 2x - 3$

x	0	1	2	3	4	5	−1	−2	−3
y	−3	−4	−3	0	5	12	0	5	12

Para: $y = 6x - x^2 - 3$

x	0	1	2	3	4	5	−1
y	−3	2	5	6	5	2	−10



Los límites a y b se determinan por los puntos de intersección de las dos curvas dadas, es decir: $a = 0$ y $b = 4$.

Sea $f(x) = 6x - x^2 - 3$ y $g(x) = x^2 - 2x - 3$, entonces el área de la región sombreada es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^4 [(6x - x^2 - 3) - (x^2 - 2x - 3)]\,dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx = 4x^2 - \frac{2x^3}{3}\Big]_0^4$$

$$\mathbf{A = \frac{64}{3}}$$

Calculando el momento M_x, tenemos:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \left[(6x - x^2 - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2\right] dx$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^4 \left[(36x^2 + x^4 + 9 - 12x^3 - 36x + 6x^2) - (x^4 + 4x^2 + 9 - 4x^3 - 6x^2 + 12x)\right] dx$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^4 (-8x^3 + 44x^2 - 48x)\,dx = -x^4 + \frac{22x^3}{3} - 12x^2\Big]_0^4 = \mathbf{\frac{64}{3}}$$

Calculamos el momento M_y, y tenemos:

$$M_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^4 x[(6x - x^2 - 3) - (x^2 - 2x - 3)]\,dx = \int_0^4 x(8x - 2x^2)\,dx$$

$$M_y = \int_0^4 (8x^2 - 2x^3)\,dx = \frac{8x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\Big]_0^4 = \mathbf{\frac{128}{3}}$$

Entonces, las coordenadas del centro de gravedad son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{128}{3}}{\frac{64}{3}} = \mathbf{2} \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{64}{3}}{\frac{64}{3}} = \mathbf{1}$$

$\therefore$ **Las coordenadas del centro de gravedad para la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x - 3$ y $y = 6x - x^2 - 3$ es (2, 1).**

2. Hallar el centro de gravedad del área en el primer cuadrante de la *hipocicloide* $x = a\cos^3\theta$ y $y = a\,\text{sen}^3\,\theta$.

Solución

Tabulamos sobre la *hipocicloide*, y tenemos:

Nota: *Para tabular y hacer la gráfica, consideramos el valor* $a = 1$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	0.65	0.35	0.125	0
y	0	0.125	0.35	0.65	1

Al hacer la gráfica de la *hipocicloide* en el primer cuadrante, tenemos:

De la ecuación $y = a\,\mathrm{sen}^3\theta$, tenemos que su derivada es:

$$dy = 3a\ \mathrm{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

Calculando el área de la *hipocicloide* en el primer cuadrante, resulta:

$$\text{Área} = \int_c^d x\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(a\cos^3\theta\right)\left(3a\ \mathrm{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta\right)$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\ \mathrm{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/2}(1/2 + 1/2\cos 2\theta)^2(1/2 - 1/2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta\right)(1/2 - 1/2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta-\frac{1}{4}\cos^2 2\theta+\frac{1}{8}\cos^2 2\theta-\frac{1}{8}\cos^3 2\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}d\theta+\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,d\theta-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\cos^2 2\theta\,d\theta-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\cos^3 2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{8}\theta+\frac{3a^2}{16}\mathrm{sen}\,2\theta-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}(1/2+1/2\cos 4\theta)\,d\theta-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\cos^2 2\theta\cos 2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3a^2\theta}{8}+\frac{3a^2\mathrm{sen}\,2\theta}{16}-\frac{3a^2}{16}\int_0^{\pi/2}d\theta-\frac{3a^2}{16}\int_0^{\pi/2}\cos 4\theta\,d\theta-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\left(1-\mathrm{sen}^2 2\theta\right)\cos 2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3a^2\theta}{8}+\frac{3a^2\ \mathrm{sen}\,2\theta}{16}-\frac{3a^2\theta}{16}-\frac{3a^2\ \mathrm{sen}\,4\theta}{64}-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,d\theta+\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2 2\theta\cos 2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3a^2\theta}{16}+\frac{3a^2\ \mathrm{sen}\,2\theta}{16}-\frac{3a^2\ \mathrm{sen}\,4\theta}{64}-\frac{3a^2\ \mathrm{sen}\,2\theta}{16}-\frac{3a^2\ \mathrm{sen}^3\,2\theta}{48}\Bigg]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3a^2\theta}{16}-\frac{3a^2\mathrm{sen}\,4\theta}{64}-\frac{3a^2\ \mathrm{sen}^3\,2\theta}{48}\Bigg]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3a^2(\pi/2)}{16}-\frac{3a^2\ \mathrm{sen}\,4(\pi/2)}{64}-\frac{3a^2\ \mathrm{sen}^3\,2(\pi/2)}{48} = \mathbf{\frac{3a^2\pi}{32}}$$

Calculamos el momento M_x, y tenemos:

$$M_x = \int_a^b x\ dy = \int_0^{\pi/2} \left(a \cos^3 \theta\right)\left(a \operatorname{sen}^3 \theta\right)\left(3a \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta\ d\theta\right) = 3a^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 \theta \cos^4 \theta\ d\theta$$

$$= 3a^3 \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^2 \theta\right)^2 \operatorname{sen} \theta \cos^4 \theta\ d\theta = 3a^3 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 \theta\right)^2 \operatorname{sen} \theta \cos^4 \theta\ d\theta$$

$$= 3a^3 \int_0^{\pi/2} \left(1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta\right) \operatorname{sen} \theta \cos^4 \theta\ d\theta$$

$$= 3a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta\ d\theta - 6a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \operatorname{sen} \theta\ d\theta + 3a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^8 \theta \operatorname{sen} \theta\ d\theta$$

$$= \frac{3a^3 \cos^5 \theta}{5} + \frac{6a^3 \cos^7 \theta}{7} - \frac{3a^3\ \cos^9 \theta}{9} \Bigg]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[\frac{3a^3 \cos^5(\pi/2)}{5} + \frac{6a^3 \cos^7(\pi/2)}{7} - \frac{3a^3 \cos^9(\pi/2)}{9}\right] - \left[\frac{3a^3\ \cos^5 (0)}{5} + \frac{6a^3 \cos^7(0)}{7} - \frac{3a^3 \cos^9(0)}{9}\right]$$

$$M_x = [0] + \frac{3a^3}{5} - \frac{6a^3}{7} + \frac{3a^3}{9} = \frac{189a^3 - 270a^3 + 105a^3}{315} = \mathbf{\frac{24a^3}{315}}$$

Calculando el momento M_y, tenemos:

$$M_y = \frac{1}{2}\int_a^b x^2\ dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(a \cos^3 \theta\right)^2 \left(3a \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta\ d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(a^2 \cos^6 \theta\right)\left(3a \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta\ d\theta\right)$$

$$= \frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^7 \theta \operatorname{sen}^2 \theta\ d\theta = \frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 \theta\right)^3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta\ d\theta$$

$$= \frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1 - \operatorname{sen}^2 \theta\right)^3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta\ d\theta$$

$$= \frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1 - 3\operatorname{sen}^2 \theta + 3\operatorname{sen}^4 \theta - \operatorname{sen}^6 \theta\right) \cos \theta\ \operatorname{sen}^2 \theta\ d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta\ d\theta - \frac{9a^3}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 \theta \cos \theta\, d\theta + \frac{9a^3}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 \theta \cos d\theta - \frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 \theta \cos \theta\ d\theta$$

$$M_y = \frac{3a^3 \operatorname{sen}^3 \theta}{6} - \frac{9a^3 \operatorname{sen}^5 \theta}{10} + \frac{9a^3 \operatorname{sen}^7 \theta}{14} - \frac{3a^3 \operatorname{sen}^9 \theta}{18}\Bigg]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3a^3 \operatorname{sen}^3(\pi/2)}{6} - \frac{9a^3 \operatorname{sen}^5(\pi/2)}{10} + \frac{9a^3 \operatorname{sen}^7(\pi/2)}{14} - \frac{3a^3 \operatorname{sen}^9(\pi/2)}{18}$$

$$= \frac{3a^3}{6} - \frac{9a^3}{10} + \frac{9a^3}{14} - \frac{3a^3}{18} = \mathbf{\frac{24a^3}{315}}$$

Por lo anterior y con base en la gráfica, se denota que, por simetría, $\bar{x} = \bar{y}$. Entonces las coordenadas del centro de gravedad son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{24a^3}{315}}{\frac{3a^2\pi}{32}} = \mathbf{\frac{256a}{315\pi}} \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{24a^3}{315}}{\frac{3a^2\pi}{32}} = \mathbf{\frac{256a}{315\pi}}$$

$\therefore$ **Las coordenadas del centro de gravedad del área en el primer cuadrante de la *hipocicloide* son** $\left(\mathbf{\frac{256a}{315\pi}}, \mathbf{\frac{256a}{315\pi}}\right)$.

3. Calcular el centro de gravedad de la superficie limitada por la parábola $y^2 = 12x$ y la recta $y = 2x$.

Solución

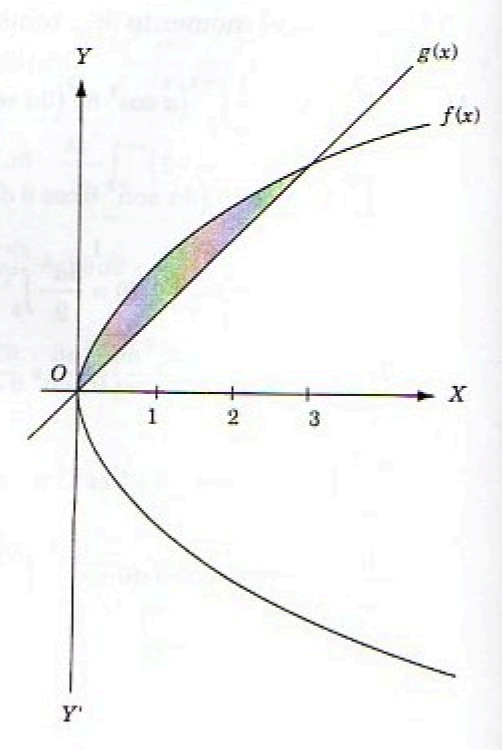
Gráficamente, tenemos:

$y^2 = 12x$

x	y
0	0
1	±3.46
2	±4.89
3	±6

$y = 2x$

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6



Calculamos el área de la región, y resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^3 \left(\sqrt{12x} - 2x\right) dx = \sqrt{12}\int_0^3 x^{1/2} dx - 2\int_0^3 x\,dx$$

$$\text{Área} = \left.\frac{2\sqrt{12}x^{3/2}}{3} - x^2\right]_0^3 = \frac{2\sqrt{12}\,(3)^{3/2}}{3} - (3)^3 = 12 - 9 = \mathbf{3}$$

Calculamos el momento M_x, y tenemos:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left[12x - (2x)^2\right] dx$$

$$M_x = 6\int_0^3 x\,dx - 2\int_0^3 x^2 dx = \left[3x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = \mathbf{9}$$

Calculando el momento M_y, tenemos:

$$M_y = \int_a^b xy\,dx = \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^3 x\left(\sqrt{12x} - 2x\right) dx = \sqrt{12}\int_0^3 x^{3/2}dx - 2\int_0^3 x^2\,dx$$

$$M_y = \left.\frac{2\sqrt{12}x^{5/2}}{5} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = \mathbf{\frac{18}{5}}$$

Entonces las coordenadas del centro de gravedad son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{18/5}{3} = \frac{18}{5} = \mathbf{\frac{6}{5}} \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{9}{3} = \mathbf{3}$$

∴ **Las coordenadas del centro de gravedad de la superficie limitada por la parábola $y^2 = 12x$ y la recta $y = 2x$ es (6/5, 3).**

Centro de gravedad de un sólido de revolución

El centro de gravedad mecánico de un sólido homogéneo coincide con el centro de gravedad geométrico de dicho cuerpo. Si el sólido tiene un plano de simetría, el centro de gravedad se localizará en dicho plano.

Para obtener una definición analítica del centro de gravedad de un sólido de revolución, consideremos la Figura 6, donde OX es el eje geométrico del sólido. El centro de gravedad estará en este eje. Sea dv un elemento de volumen, es decir, un cilindro de revolución de altura Δx y radio y. Entonces $dv = \pi y^2 \Delta x$.

El momento de este cilindro con respecto al plano que pasa por OY perpendicular a OX es: $dM_y = x\,dv = \pi x y^2 \Delta x$.

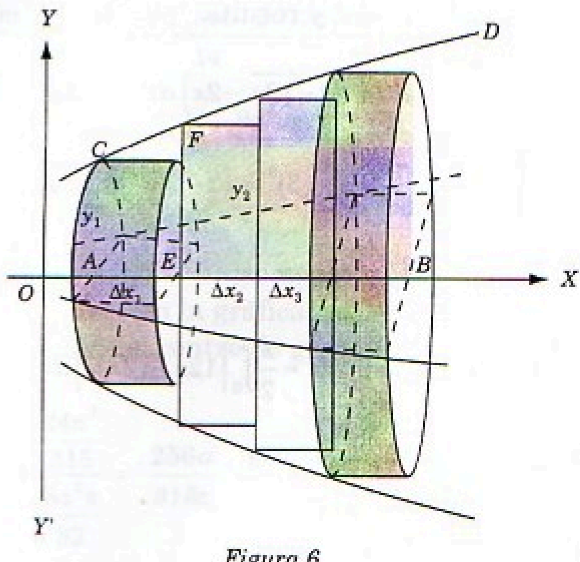


Figura 6

El momento del sólido se determina mediante el teorema fundamental del cálculo, y $\overline{x}$ se obtiene con:

$$V\overline{x} = M_y = \int_a^b \pi\, xy^2\, dx \quad \text{o} \quad V\overline{x} = M_y = \pi\int_a^b xy^2\, dx$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{M_y}{V}$$

El momento del cilindro con respecto al plano que pasa por OX perpendicular a OY es: $dM_x = y\, dv = \pi y x^2\, dy$, ya que $dv = \pi x^2\, \Delta y$.

El momento del sólido se determina con el teorema fundamental del cálculo, y $\overline{y}$ se da por medio de:

$$V\overline{y} = M_x = \int_a^b \pi\, yx^2\, dy \quad \text{o} \quad V\overline{y} = M_x = \int_a^b \pi yx^2\, dy$$

$$\therefore \overline{y} = \frac{M_x}{V}$$

EJEMPLOS

1. Calcular el centro de gravedad del sólido de revolución generado al girar el área limitada por OX y las curvas $ay = x^2$ y $x = a$.

Solución

De la ecuación $ay = x^2$, despejamos y, y resulta: $y = \dfrac{x^2}{a}$.

Calculando el volumen del sólido de revolución, tenemos:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^a \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 dx = \frac{\pi}{a^2}\int_0^a x^4\,dx = \left[\frac{\pi x^5}{5a^2}\right]_0^a = \frac{\pi a^3}{5}$$

Calculando el momento del sólido, resulta:

$$M_y = \pi\int_a^b xy^2\,dx = \pi\int_0^a x\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 dx = \frac{\pi}{a^2}\int_0^a x^5\,dx = \left[\frac{\pi x^6}{6a^2}\right]_0^a = \frac{\pi a^4}{6}$$

Calculamos el centro de gravedad del sólido, y resulta:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{V} = \frac{\frac{\pi a^4}{6}}{\frac{\pi a^3}{5}} = \frac{5a}{6}$$

$\therefore$ **Las coordenadas del centro de gravedad del sólido dado son $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$.**

2. Calcular el centro de gravedad del sólido de revolución generado al girar el área limitada por OY y las curvas $x^2 - y^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Solución

A partir de la ecuación $x^2 - y^2 = 1$, y despejando x^2, resulta: $x^2 = 1 + y^2$.

Calculando el volumen del sólido de revolución, tenemos:

$$V_y = \pi\int_a^b x^2\,dy = \pi\int_0^1 (1 + y^2)\,dy = \pi\left(y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{4\pi}{3}$$

Calculamos el momento del sólido, y tenemos:

$$M_x = \pi\int_a^b yx^2\,dy = \pi\int_0^1 y(1 + y^2)\,dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{3\pi}{4}$$

Calculando el centro de gravedad del sólido, resulta

$$\bar{y} = \frac{M_x}{V} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{9}{16}$$

$\therefore$ **Las coordenadas del centro de gravedad del sólido dado son (0, 9/16).**

EJERCICIO XXVIII

I. Calcular el centro de gravedad de cada una de las superficies limitadas por las siguientes curvas.

1. $y^2 = 9x, \quad x = 5$
2. $y = x^2, \quad y = 2x + 3$
3. $x = 4y - y^2, \quad y = x$
4. $y = x^3, \quad x = 2, \quad y = 0$
5. $y = x^3, \quad y = 4x$ *(primer cuadrante)*
6. $y^2 = 4x, \quad 2x - y - 4 = 0$
7. $y = x^3 - 3x, \quad y = x$ *(primer cuadrante)*
8. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, y = 0, x = 6$ *(primer cuadrante)*
9. $y = 4x - x^2, \quad 2x - y - 3 = 0$
10. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$
11. $y^2 = a^2 - ax, x = 0, y = 0$ *(primer cuadrante)*
12. $y = 6x - x^2, \quad y = x$

II. Resolver los siguientes problemas.

1. Calcular el centro de gravedad de la superficie limitada por los ejes de coordenadas y la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$.
2. Calcular el centro de gravedad de la parte de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, que está en el primer cuadrante.
3. Calcular el centro de gravedad de la superficie limitada por la *cisoide* $y^2(2a - x) = x^3$ y su asíntota $x = 2a$.
4. Calcular el centro de gravedad de la superficie limitada por la *cardioide* $r = a(1 + \cos\theta)$.
5. Calcular el centro de gravedad del área limitada por las parábolas $y^2 = x$ y $x^2 = 8y$.
6. Calcular el centro de gravedad del área bajo la curva $y = 2 \text{ sen } 3x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/3$.
7. Calcular el centro de gravedad de la región limitada por el semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ y el eje X.
8. Calcular el centro de gravedad de la superficie comprendida bajo una arcada de la *sinusoide* $y = \text{sen } x$.
9. Calcular el centro de gravedad de la superficie limitada por el lazo de la curva $y^2 = 4x^2 - x^3$.
10. Calcular el centro de gravedad de la superficie acotada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $y = mx$.

11. Calcular el centro de gravedad de la superficie incluida por las parábolas $x^2 = by$ y $y^2 = ax$.

12. Calcular el centro de gravedad del área del lazo derecho de $y^2 = x^4(1 - x^2)$.

13. Calcular el centro de gravedad del área entre $x^2 = 8y - 4$, $x^2 = 4y$, en el primer cuadrante.

14. Para el área limitada por $y = -x^2 - 3x + 6$ y $x + y - 3 = 0$, calcular el centro de gravedad.

15. Calcular el centro de gravedad del área del primer cuadrante limitada por $y^2 = 12x$ y su lado recto, en torno al eje X.

16. Calcular el centro de gravedad de la región acotada por las curvas $y = 4 - x^2$ y $y = x + 2$.

17. Calcular el centro de masas, para:

    a) $m_1 = 8$, $x_1 = -7$; $m_2 = 5$, $x_2 = 3$; $m_3 = 7$, $x_3 = 5$.

    b) $m_1 = 6$, $x_1 = 4$; $m_2 = 2$, $x_2 = -4$; $m_3 = 5$, $x_3 = -5$; $m_4 = 1$, $x_4 = 3$; $m_5 = 7$, $x_5 = 2$.

    c) $m_1 = 7$, $x_1 = 0$; $m_2 = 14$, $x_2 = -3$; $m_3 = 15$, $x_3 = 4$; $m_4 = 10$, $x_4 = -1$; $m_5 = 3$, $x_5 = -2$.

18. Calcular el centro de masas, para:

    a) $m_1 = 8$, $P_1(2, 2)$; $m_2 = 3$, $P_2(-3, 1)$; $m_3 = 13$, $P_3(1, -4)$.

    b) $m_1 = 9$, $P_1(1, -1)$; $m_2 = 3$, $P_2(5, 4)$; $m_3 = 6$, $P_3(-4, 0)$; $m_4 = 11$, $P_4(2, 3)$.

    c) $m_1 = 6$, $P_1(-2, -3)$; $m_2 = 8$, $P_2(-1, 0)$; $m_3 = 4$, $P_3(7, 1)$; $m_4 = 2$, $P_4(0, 0)$; $m_5 = 12$, $P_5(-3, 0)$.

19. Calcular M_x, M_y y $(\overline{x}, \overline{y})$ para las láminas de densidad uniforme r limitadas por las curvas:

    a) $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 4$ b) $x = 4 - y^2$, $x = 0$ c) $x = 2y - y^2$, $x = 0$

20. Calcular el centro de gravedad del sólido que se forma cuando la superficie acotada por las rectas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ y la curva $y = e^x$ gira alrededor del eje X.

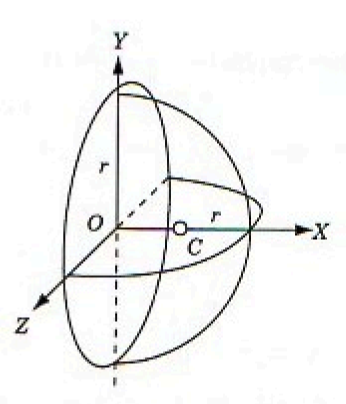
21. Calcular el centro de gravedad del sólido que se forma al hacer girar la superficie limitada por las rectas $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ y la curva $y = \operatorname{sen} 2x$, alrededor del eje X.

22. El radio de la base superior de un tronco de cono de revolución es de 5 cm; el de la base inferior es de 10 cm, y la altura mide 16 cm. Hallar el centro de gravedad.

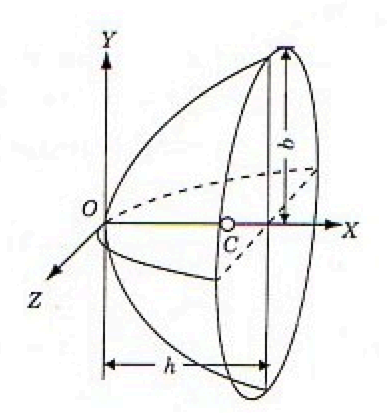
23. Calcular el centro de gravedad del sólido que se forma cuando la superficie del primer cuadrante está acotada por las rectas $y = 0$, $x = 2a$ y la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gira alrededor del eje X.

24. Calcular el centro de gravedad para cada uno de los siguientes sólidos:

a) Hemisferio.



b) Paraboloide de revolución.



III. El área acotada por el eje X y cada una de las curvas siguientes gira alrededor de OX. Calcular el centro de gravedad del sólido de revolución que se engendra:

a) $x^2 + y^2 = 4, x = 0, x = 1$

b) $y^2 = 4x, x = 1, x = 4$

c) $y = a \operatorname{sen} x$, $x = \pi/2$

d) $x^2 - y^2 = a^2, x = 2a$

e) $2xy = a^2$; $x = a/2$, $x = 2a$

f) $y = x^2$, $y = x$

g) $y = 4 - x^2$ *(primer cuadrante)*

h) $y = 4x - x^2$, $y = x$

i) $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0, x = 8$

j) $(x - 2)\, y^2 = 4, y = 0, x = 3, x = 5$

IV. El área acotada por el eje Y y cada una de las curvas siguientes gira alrededor de OY. Calcular el centro de gravedad del sólido de revolución que se engendra:

a) $ay^2 = x^3$, $y = a$

b) $y = x^2$, $y = 9, x = 0$

c) $y = 4x - x^2$, $y = x$

d) $y^2 = 4ax$, $y = b$

e) $x^2y = 16\,(4-y)$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$

f) $y = 4 - x^2$, *(primer cuadrante)*

g) $y = x^2$, $y = x$

h) $y^2 = 12x$, $y = 0$, $x = 3$

4.10 CÁLCULO DE LA PRESIÓN EJERCIDA POR UN FLUIDO SOBRE SUPERFICIES VERTICALES

Introducción

De acuerdo con la física, se sabe que cuanto más profundamente se sumerge un objeto, mayor es la presión que sufre (entendiendo como *presión* la fuerza ejercida sobre cada unidad de área). Lo anterior se expresa con la fórmula:

$$P = \varpi h$$

donde P = presión del fluido, ϖ = densidad del fluido (peso por unidad de volumen) y h = altura bajo la superficie (profundidad).

Por ejemplo, como el gramo es el peso de 1 cm^3 de agua, el peso de 1m^3 es 1000 kg. Además, la densidad del agua es de 62.4 libras/pie^3 y por tanto, a una profundidad de 9 pies, la presión sobre un objeto sumergido es:

$$P = \varpi h = (62.4 \text{ libras/pie}^3)(9 \text{ pies}) = \mathbf{561.6 \text{ libras/pie}^2}.$$

Esta presión corresponde al peso de la *columna de agua* de 9 pies de altura que soporta sobre sí cada pie cuadrado de área del objeto. Además, de acuerdo con el *principio de Pascal*, la presión ejercida por un fluido a una determinada profundidad es *igual en todas direcciones*. Entonces, la presión contra la pared del contenedor, a cierta profundidad, es igual a la ejercida sobre un objeto sumergido a la misma profundidad. De lo anterior deducimos que la presión ejercida por un fluido es independiente de la forma del recipiente. Esto quiere decir que 4 metros por debajo de la superficie, la presión sobre la pared de una piscina es igual a la que se ejerce sobre el frontal de una presa, supuesta una idéntica densidad del agua. La presión queda determinada por la profundidad únicamente; cualquier otra dimensión del contenedor es irrelevante. Nuestra mayor atención sobre el conocimiento de la presión de fluidos recae en el cálculo de la presión total ejercida por un fluido sobre las paredes de un contenedor. Si el contenedor es de paredes verticales, resulta fácil calcular la presión total sobre su *fondo*. La presión en el *fondo* es constante, y la presión total es el producto de dicha presión por el área del fondo. En general, para una región plana sumergida horizontalmente, tenemos que:

$$P = \varpi h A$$

donde P = presión total sobre una región plana; $\overline{\omega}$ = densidad del fluido; h = altura bajo la superficie (profundidad); A = área de la región plana.

Si deseamos calcular la presión total sobre las paredes verticales de un contenedor, encontramos que la presión no es constante en cada punto, sino que crece con la profundidad.

Si *ABCD* (Figura 1) representa una parte de la superficie vertical de una pared de un *aljibe*, y deseamos conocer la presión total del fluido sobre dicha superficie, trazamos los ejes coordenados tal y como está indicado en la Figura 1, ubicando el eje Y sobre la superficie del fluido. Luego dividimos AB en n subintervalos y construimos rectángulos horizontales dentro de la superficie *ABCD*.

El área de uno, cualquiera, de los rectángulos (como EP) es $y\ \Delta x$. Si este rectángulo fuese horizontal a la profundidad x, la presión del fluido sobre él sería:

$$P = \overline{\omega} x\ y\ \Delta x$$

Por el *principio de Pascal*, $P = \overline{\omega}\, x\, y\, \Delta x$ es, aproximadamente, la presión sobre el rectángulo EP en su posición vertical. Por tanto, la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\omega} x_1\, y_1\, \Delta x_1$$

representa, aproximadamente, la presión sobre todos los rectángulos.

Figura 1

La presión sobre la superficie *ABCD* es el límite de la suma y, por el teorema fundamental del cálculo integral, tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega} x_i\, y_i\, \Delta x_i = \int \overline{\omega} x\, y\, dx$$

Por tanto, la presión de un fluido sobre una superficie vertical sumergida limitada por una curva, el eje X y las dos rectas horizontales $x = a$ y $x = b$, se obtiene con la fórmula:

$$\boldsymbol{P = \overline{\omega} \int_a^b xy\, dx}$$

El valor de y ha de sustituirse en términos de x, deducido de la ecuación de la curva dada.

EJEMPLOS

1. Una cañería circular de 4 m de diámetro (Figura 2) está medio llena de agua. Calcular la presión sobre la compuerta que cierra dicha cañería.

Solución

La ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = 4$, de la cual tenemos que: $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Como el gramo es el peso de 1 cm^3 de agua, el peso de 1 m^3 es 1000 kg. Entonces $\varpi = 1000$ kg/m^3. Los límites son $x = 0$ y $x = 2$; así, la presión a la derecha del eje X es:

Figura 2

$$P = \varpi \int_a^b x\,y\,dx = 1000 \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\,dx$$

$$P = -\frac{1000\left(4 - x^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg]_0^2 = \left[-\frac{1000\left[4 - (2)^2\right]^{3/2}}{3}\right] - \left[-\frac{1000\left[4 - (0)^2\right]^{3/2}}{3}\right] = \mathbf{2\,666.66\ kg}$$

Para obtener la presión total del fluido, tenemos:

$$P_{TOTAL} = 2\,P = 2\,(2666.66\text{ kg}) = \mathbf{5333.33\ kg}$$

∴ La presión total sobre la compuerta que cierra la cañería es de 5333.33 kg.

2. Una presa tiene una compuerta vertical en forma de trapecio (Figura 3) que mide 12 m en su lado superior, 8 m en su base y 4 m de altura. ¿Cuál es la fuerza total ejercida sobre la compuerta si su lado superior está 4 m bajo la superficie del agua?

Solución

Con base en la Figura 3, tenemos: $dA = 2x\,dy$, $h = 8 - y$, $dP = \varpi\,(8 - y)\,2x\,dy$.

Determinando la ecuación de la recta AB, tenemos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{4 - 0}{6 - 4}(x - 4)$$

$$\therefore\ \mathbf{y = 2x - 8}$$

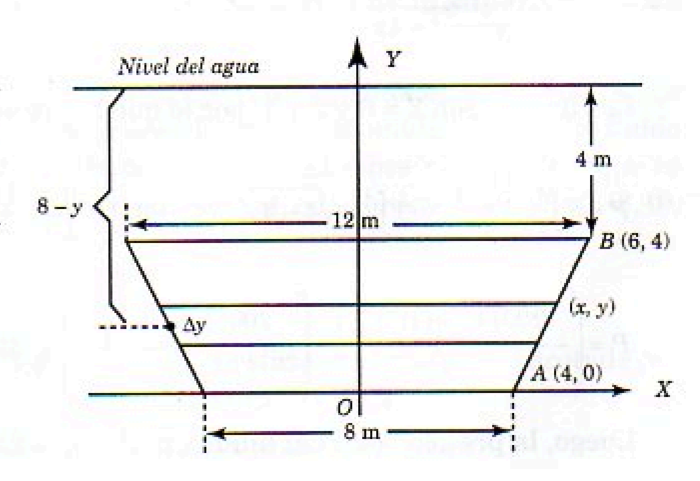


Figura 3

A continuación despejamos x en la ecuación de la recta $AB\left(x = \frac{y+8}{2}\right)$ y sustituimos en $dP = \overline{\omega}(8-y)\,2x\,dy$, y resulta: $dP = \overline{\omega}(8-y)\,2\left(\frac{y+8}{2}\right)dy = \overline{\omega}\left(64-y^2\right)dy$

Integramos $dP = \overline{\omega}(64-y^2)\,dy$ dentro de los límites $y = 0$ y $y = 4$, y obtenemos:

$$P = \overline{\omega}\int_0^4 \left(64-y^2\right)dy = \overline{\omega}\left[64y - \frac{y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{\mathbf{704}}{\mathbf{3}}\overline{\omega}$$

Sea $\overline{\omega} = 1000$ kg/m³, por tanto $\boldsymbol{P} = \frac{\mathbf{704}}{\mathbf{3}}(\mathbf{1000}) = \mathbf{234\,667\ kg}$

∴ La fuerza total ejercida sobre la compuerta es de 234 667 kg.

3. Cada uno de los extremos de un tanque horizontal es una elipse cuyo eje horizontal es de 4 m y el eje vertical de 2 m. Calcular la presión sobre un extremo cuando el tanque está medio lleno de petróleo que pesa 800 kg/m³.

Solución

Con base en la Figura 4, tenemos que la ecuación de la elipse es:

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, con $a = 2$ y $b = 1$,

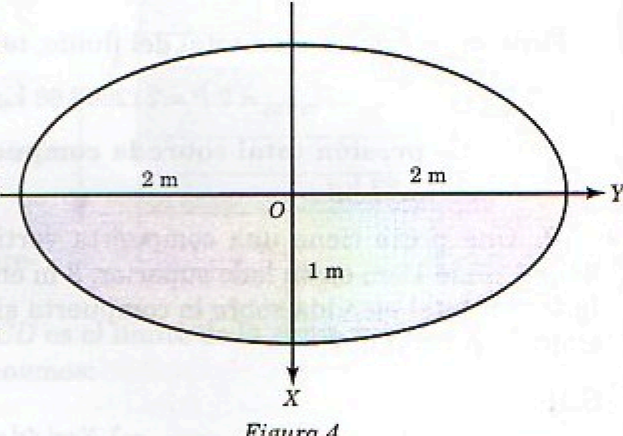


Figura 4

Tenemos que: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

Despejamos y en la ecuación:

$y = \sqrt{4-4x}$

Los límites son $x = 0$ y $x = 2$; por lo que la presión a la derecha del eje X es:

$$P = \overline{\omega}\int_a^b xy\,dx = 800\int_0^1 x\sqrt{4-4x^2}\,dx = 800\left(-\frac{1}{8}\right)\left[\frac{2\left(4-4x^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^1$$

$$P = \left(-\frac{200\left[4-4(1)^2\right]^{3/2}}{3}\right) - \left(-\frac{200\left[4-4(0)^2\right]^{3/2}}{3}\right) = \mathbf{533.33\ kg}$$

Luego, la presión total del fluido es: $P_{TOTAL} = 2P = 2(533.33) = \mathbf{1066.66\ kg}$

∴ La presión sobre un extremo del tanque es de 1066.66 kg.

4. Una superficie plana, cuya forma es la de un segmento parabólico de 12 m de base y 4 m de altura, está sumergida en el agua de manera que su base se encuentra en la superficie libre del líquido. Calcular la fuerza ejercida sobre una de las caras de la superficie.

Solución

Con base en la Figura 5, se denota que la ecuación canónica de la parábola es $x^2 = 4\,py$. Sustituyendo el punto (6, 4), resulta que $p = 9/4$; así la ecuación del segmento parabólico es $x^2 = 9y$; luego, $x = 3\sqrt{y}$.

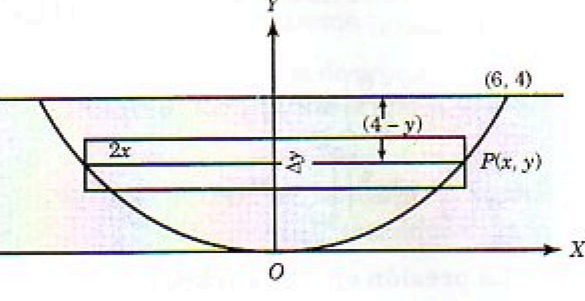


Figura 5

El área del rectángulo genérico es $2x\ \Delta y$; la profundidad de su centro geométrico es $(4-y)$. Sean los límites $y = 0$ y $y = 4$. Si aplicamos la fórmula $P = \overline{\varpi}\, h\, A$, tenemos:

$$P = \overline{\varpi}(4-y)2x\,\Delta y = \overline{\varpi}(4-y)\,2\left(3\sqrt{y}\right)\Delta y = 6\overline{\varpi}\left(4\sqrt{y} - y^{2/3}\right)\Delta y$$

Por integración, resulta:

$$P = 6\overline{\varpi}\int_0^4\left(4\sqrt{y} - y^{3/2}\right)dy = 6\overline{\varpi}\left[\left(\frac{8y^{2/3}}{3} - \frac{2y^{5/2}}{5}\right)\right]_0^4 = \frac{\mathbf{256\,\overline{\varpi}}}{\mathbf{5}}$$

Sea $\overline{\varpi} = 1000$ kg/m³, por tanto $P = \dfrac{256(1000)}{5} =$ **51200 kg**

∴ **La fuerza ejercida sobre una de las caras de la superficie es de 51 200 kg.**

5. En el siguiente problema el eje Y se dirige verticalmente hacia arriba, y el eje X está al nivel de la superficie de un fluido. El peso de la unidad cúbica del fluido está representado por $\overline{\varpi}$. Calcular la presión ejercida sobre la superficie que se forma uniendo con líneas rectas la serie de puntos, en el orden dado: (0, 0), (3, 0), (0, – 6) y (0, 0).

Solución

Con base en la Figura 6, se denota que la superficie sumergida está acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $2x - y - 6 = 0$.

El área del rectángulo genérico es $x\ \Delta y$, y la profundidad es y.

Aplicando la fórmula $P = \overline{\varpi}\, h\, A$, tenemos:

$$P = \overline{\omega}\ y\ x\ \Delta y = \overline{\omega}\ y\left(\frac{y+6}{2}\right)\Delta y$$

Integramos entre los límites $y = -6$ y $y = 0$, y resulta:

$$P = \overline{\omega}\int_{-6}^{0} y\left(\frac{y+6}{2}\right)\Delta y = \frac{\overline{\omega}}{2}\int_{-6}^{0}\left(y^2+6y\right)dy$$

$$P = \frac{\overline{\omega}}{2}\left(\frac{y^3}{3}+3y^2\right)\Bigg]_{-6}^{0} = \mathbf{18\overline{\omega}}$$

∴ **La presión ejercida sobre la superficie es de 18 $\overline{\omega}$.**

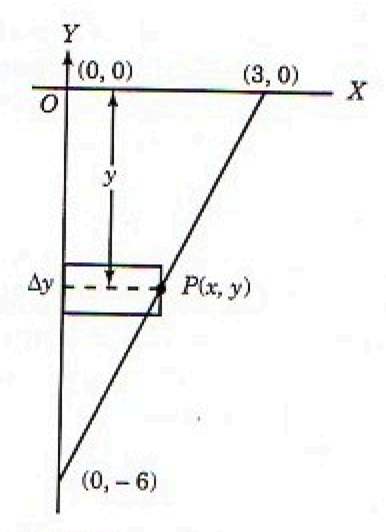


Figura 6

EJERCICIO XXIX

I. En los siguientes problemas el eje Y se dirige verticalmente hacia arriba, y el eje X está al nivel de la superficie de un fluido. Sea $\overline{\omega}$ el peso de la unidad cúbica del fluido. Hallar la presión sobre las superficies que se forman uniendo con líneas rectas cada serie de puntos, en el orden dado.

1. (0, 0), (3, – 3), (0, – 6), (– 3, – 3), (0, 0)
2. (1, 0), (1, – 2), (– 1, – 2), (– 1, 0), (1, 0)
3. (3, 0), (2, – 5), (– 2, – 5), (– 3, 0), (3, 0)
4. (2, 0), (0, – 3), (– 2, 0), (2, 0)
5. (0, 0), (3, – 6), (0, – 6), (0, 0)

II. Resolver los siguientes problemas.

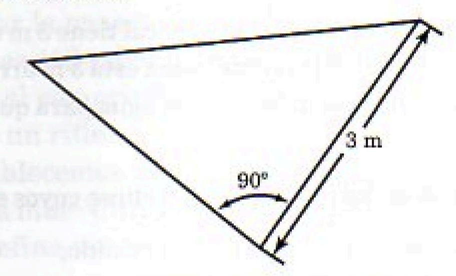
1. Un depósito cilíndrico de gasolina está colocado de modo que el eje de su cilindro esté horizontal. Si el depósito está medio lleno, calcular la fuerza ejercida sobre uno de sus laterales circulares, de diámetro igual a 3 pies, y la densidad de la gasolina es de 50 libras/pie^3.
2. Un extremo vertical de un tanque es un segmento de parábola con el vértice hacia abajo; la distancia en la parte superior es de 3 m y la profundidad, de 6 m. Hallar la presión sobre este extremo cuando el tanque está lleno de un fluido que pesa 1100 kg/m^3.
3. Una *claraboya* cuadrada en el extremo vertical de un barco mide 1 pie de lado. Calcular la fuerza total que soporta, supuesto que el lado superior del cuadrado está 15 pies bajo la superficie del agua, cuya densidad es de 62.4 libras/pie^3.

4. Un tanque cilíndrico vertical de 10 m de diámetro y 16 m de altura está lleno de agua. Calcular la presión ejercida sobre la superficie encorvada.

5. Un tanque cilíndrico horizontal, de 3 m de diámetro, está medio lleno de petróleo y su peso es de 800 kg/m³. Hallar la presión sobre un extremo.

6. Una alberca tiene 8 m de anchura, 14 m de longitud, 1.5 m de profundidad en un extremo y 4 m en el otro; su fondo es un plano inclinado. Hallar la fuerza total sobre cada pared vertical de la alberca.

7. El extremo vertical de un *artesa* es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 3 m cada uno. Hallar la presión del fluido sobre la extremidad cuando la *artesa* está llena de agua.

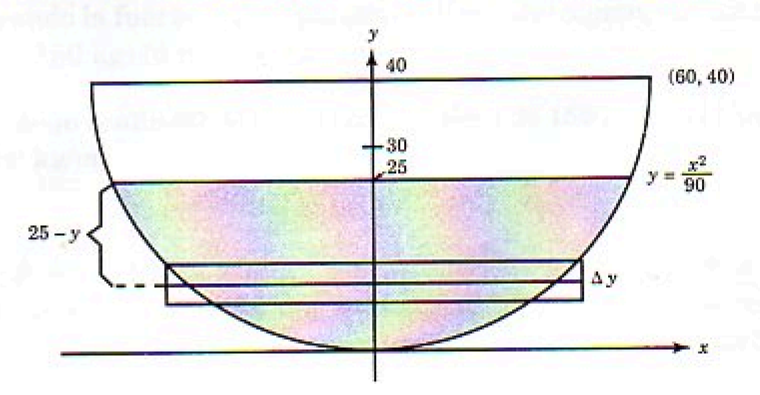


8. Calcular la fuerza ejercida sobre el fondo de un recipiente de forma semicircular de 2 m de radio cuando está lleno de un fluido cuyo peso específico es 900 kg/m³.

9. Una superficie plana, cuya forma es la de un segmento parabólico de 12 m de base y 4 m de altura, se encuentra parcialmente sumergida en petróleo que pesa 800 kg/m³, de manera que su eje es paralelo a la superficie libre y situada 3 m por debajo de ella.

10. El fondo de una piscina es un plano inclinado. La piscina tiene 2 pies de profundidad en un extremo y 10 pies en el otro. Si dicha piscina mide 40 pies de largo y 30 de ancho y sus paredes son verticales, ¿cuál es la fuerza total que actúa sobre uno de los laterales de 40 pies?

11. Una presa vertical mide 120 pies de anchura en su parte superior y 40 pies de altura. Hallar la fuerza total que ejerce sobre el agua, si ésta alcanza una altura de 25 pies.



12. Un tanque cilíndrico está lleno hasta la mitad con gasolina, cuyo peso es de 42 libras/pie^3. Si el eje es horizontal y el diámetro es de 6 pies, hallar la fuerza en un extremo debido a la presión del fluido.
13. Los extremos de una *pila* son regiones semicirculares, cada una con un radio de 2 m. Calcular la fuerza ejercida por la presión del fluido sobre un extremo de la pila si está llena de agua.
14. Una hoja de lámina en forma rectangular se sumerge verticalmente en un tanque con agua con el borde superior en la superficie del líquido. Si el ancho de la lámina es de 2 m y el largo es de 6 m, hallar la fuerza debida a la presión del líquido sobre un lado de la lámina.
15. Una compuerta rectangular en una presa vertical tiene 3 m de ancho y 2 m de alto. Calcular: *a)* La presión cuando el nivel del agua está 3 m arriba del borde superior de la compuerta. *b)* ¿Cuánto más debe subir el agua para que la presión encontrada en *a)* sea del doble?
16. Hallar la presión sobre la mitad inferior de una elipse cuyos semiejes son 2m y 3 m,

    a) cuando el eje mayor está en la superficie del fluido;
    b) cuando el eje menor está en la superficie.

4.11 CÁLCULO DEL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Trabajo realizado por una fuerza constante

Para los científicos e ingenieros, el concepto de *trabajo* resulta ser importante al momento de calcular la energía requerida para realizar algunas tareas de tipo físico. Por ejemplo, es útil saber la cantidad de trabajo desarrollado al elevar una viga con una grúa, al comprimir un muelle, cuando un camión transporta una carga o al disparar un rifle.

En general, establecemos que se ha realizado un trabajo cada vez que una fuerza (f) aplicada mueve un objeto cierta distancia (d); el trabajo (T) realizado por esa fuerza se define como:

$$T = f\,d$$

El trabajo puede expresarse en distintas unidades, por ejemplo: libras/pie; libras/pulgadas; kilogramos/metro; kilogramos/centímetro; etc. En el sistema métrico las unidades fundamentales de trabajo son la dina/cm (erg) y el newton/m (joule), donde 1 joule = 10^7 ergs.

EJEMPLO

1. Calcular el trabajo realizado al levantar un objeto de 150 kg una altura de 4m.

Solución

Considerando la fuerza requerida como el peso del objeto, el trabajo realizado es: $T = fd = (150\text{ kg})\,(4\text{ m}) =$ **600 kg/m.**

∴ **El trabajo realizado al levantar un objeto de 150 kg una altura de 4 m es de 600 kg/m.**

Trabajo realizado por una fuerza variable

Al aplicar una fuerza variable a un objeto, la determinación del trabajo realizado se obtiene por los métodos del cálculo integral, debido a que la fuerza necesaria para mover el objeto cambia al variar la posición de dicho objeto. Entonces, la fuerza requerida para comprimir un resorte crece conforme se comprime dicho resorte. Ahora analicemos el trabajo que se realiza al vaciar un *aljibe* (trabajo de bombeo) cuya forma es la de un sólido de revolución con eje vertical. Supongamos que el eje X de la curva que gira sea vertical y que el eje Y esté en el plano de la parte superior del aljibe; tal como se muestra en la Figura 1. Tenemos que calcular el trabajo que se realiza al variarlo, si la superficie del líquido pasa de la profundidad a hasta la profundidad b.

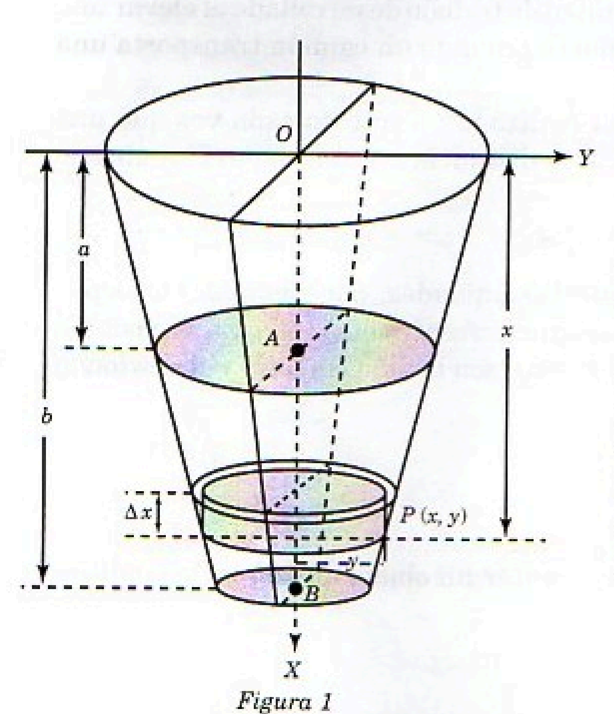


Figura 1

Dividiendo AB en n subintervalos, por estos puntos de división se hacen pasar planos perpendiculares al eje de revolución que constituyen cilindros de revolución.

El volumen de uno, cualquiera, de dichos cilindros es $\pi y^2 \Delta x$ y ϖ es el peso de la unidad cúbica del líquido; resulta: $\varpi \pi y^2 \Delta x$.

El trabajo que se efectúa al subir un peso es igual al producto del peso por la altura vertical; por tanto, el trabajo de subir dicho cilindro de líquido a la altura x es $\varpi \pi y^2 x \Delta x$. La suma del trabajo realizado al subir hasta arriba todos estos cilindros es:

$$\sum_{i=1}^{n} \varpi\pi\, y_i^2\, x_i\, \Delta x_i$$

El trabajo efectuado al vaciar la parte AB del aljibe es, lógicamente, el límite de dicha suma y, por el teorema fundamental del cálculo integral, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varpi\pi\, y_i^2 x_i \Delta x_i = \int \varpi\pi\, y^2\, x\, dx$$

Entonces, el trabajo efectuado al vaciar un aljibe en forma de un sólido de revolución, de manera tal que la superficie del líquido pase desde la profundidad a hasta la profundidad b, está dado por la fórmula:

$$T = \overline{\omega}\pi\int_a^b y^2\ dx.$$

Aquí el valor de y ha de sustituirse en términos de x obtenido de la ecuación de la curva que gira.

El principio fundamental para este razonamiento es que el elemento de trabajo (dT) que se realiza al levantar un elemento (dV) de volumen a una altura h es: $dT = \overline{\omega}\ h\ dV$.

Tomando en cuenta lo anterior, podemos elegir los ejes de coordenadas de cualquier modo que nos convenga.

EJEMPLOS

1. Calcular el trabajo que se realiza al bombear el agua que llena su *aljibe hemisférico* de 5 m de profundidad (Figura 1).

Solución

Gráficamente, tenemos:

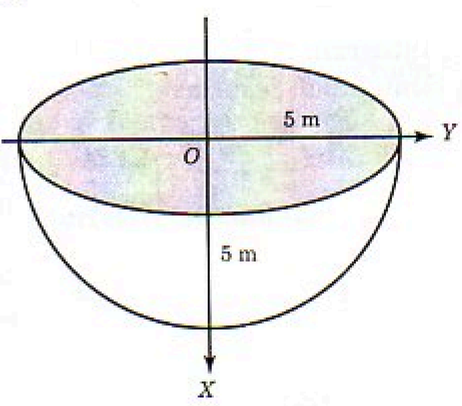


Figura 1

La ecuación del círculo es: $x^2 + y^2 = 25$

Despejando y^2, tenemos: $y^2 = 25 - x^2$

Si $\overline{\omega} = 1000$ y los límites son $x = 0$ y $x = 10$, sustituyendo en la fórmula correspondiente, resulta:

$$T = \overline{\omega}\pi\int_a^b y^2\ x\ dx = 1000\pi\int_0^5 \left(25 - x^2\right) x\, dx$$

$$= -\frac{1000\pi\left(25 - x^2\right)^2}{4}\Bigg]_0^5 = \mathbf{156\,250\ \pi\ kg\ m}$$

$\therefore$ **El trabajo que se realiza es de 156 250 π kgm.**

2. Una *cisterna* cónica tiene 30 m de diámetro superior y 20 m de profundidad. Si la superficie del agua está 10 m más abajo que la parte de arriba, calcular el trabajo que se hace al bombear hasta arriba el agua de la cisterna.

Solución

Gráficamente, tenemos:

Con base en la Figura 2, tenemos:

$$dV = \pi x^2\, dy$$

Sea la altura $h = 20 - y$.

Entonces $dT = \overline{\omega}\,(20 - y)\,\pi\, x^2\, dy$.

La ecuación de la recta OA es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$y - 0 = \left(\frac{20 - 0}{15 - 0}\right)(x - 0)$$

$$15y = 20x$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{4}y}, \text{ de donde } \boldsymbol{x^2 = \frac{9}{16}y^2}$$

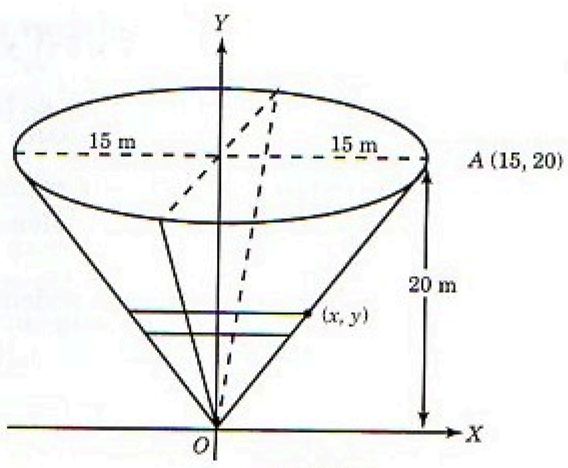


Figura 2

Sustituyendo, tenemos: $dT = 1000(20 - y)\,\pi\left(\dfrac{9}{16}y^2\right)dy.$

Integramos entre los límites $y = 0$ y $y = 10$, puesto que el agua tiene 10 m de profundidad, resulta:

$$T = 1000\,\pi\int_0^{10}\left(\frac{45}{4}y^2 - \frac{9}{16}y^3\right)dy = 1000\,\pi\left(\frac{45}{12}y^3 - \frac{9}{64}y^4\right)\Big]_0^{10}$$

$$T = 1000\,\pi\int_0^{10}\left(\frac{45}{12}(1000) - \frac{9}{64}(10\ 000)\right) = 3\ 750\ 000\,\pi - 1\ 406\ 250\,\pi$$

$$T = 2\ 343\ 750\,\pi = \mathbf{3\ 681\ 553.891\ kg\ m}$$

$\therefore$ **El trabajo que se hace es $T = 3\ 681\ 553.891$ kg m.**

3. Para comprimir un resorte desde una longitud natural de 15 cm hasta 12 cm, se requiere una fuerza de 75 kg. Calcular el trabajo realizado al comprimirlo 3 cm más. (Aplicar la ley de Hooke).

Solución

Con base en la ley de Hooke, que establece que la fuerza $f(x)$ necesaria para comprimir o extender un resorte x unidades desde su longitud natural es $f(x) = kx$, donde k es una constante que depende del resorte en cuestión.

Entonces: $f\,(x) = kx$

$f\,(3) = 75 = k(3)$, resultando $k = 25$, es decir: $f\,(x) = 25\,x$

Para calcular el incremento de trabajo, suponemos que la fuerza requerida para comprimir el resorte en Δx es constante.

Entonces el incremento de trabajo es: ΔT = (fuerza) (incremento de d)

$$\Delta T = 25\,x\,\Delta x$$

Puesto que el resorte se comprime entre $x = 3$ y $x = 6$ cm menos que su longitud natural, el trabajo realizado es:

$$T = \int_3^6 25x\,dx = \frac{25x^2}{2}\Bigg]_3^6 = 450 - 112.5 = \mathbf{337.5\ kg\ cm}$$

$\therefore$ **El trabajo realizado es de 337.5 kg cm.**

4. Si un módulo espacial pesa 30 toneladas en la superficie terrestre, entonces, despreciando la resistencia del aire, ¿cuánto trabajo se requiere para elevarlo hasta una altura de 2500 km?

Solución

Puesto que el peso de un cuerpo varía con proporción inversa al cuadrado de su distancia al centro de la tierra, expresamos la fuerza $f(x)$ ejercida por la gravedad mediante: $f(x) = \dfrac{k}{x^2}$.

El módulo pesa 30 toneladas en la superficie terrestre, la cual tiene un radio aproximado de 6436 km.

Sustituyendo tenemos: $f(x) = \dfrac{k}{x^2}$

$$30 = \frac{k}{(6436)^2} = \frac{k}{41\ 422\ 096} \quad \text{con } K = 1\ 242\ 662\ 880$$

Entonces el incremento de trabajo es: $\Delta T = \dfrac{1\ 242\ 662\ 880}{x^2}\Delta x$

Al propulsar el módulo desde 6436 hasta 8936 km, el trabajo desarrollado es:

$$T = \int_{6436}^{8936} \frac{1\ 242\ 662\ 880}{x^2}\,dx = -\frac{1\ 242\ 662\ 880}{x}\Bigg]_{6436}^{8936}$$

$$T = -139\ 062.5425 - (-193\ 080) = \mathbf{54\ 017.4575\ toneladas\ km}$$

$\therefore$ **El trabajo necesario para elevarlo es de 54 017.4575 toneladas km.**

5. El depósito de la Figura 3 tiene 8 m de altura y 2 m de radio en su parte superior. Si se llena hasta una altura de 6 m con un líquido que pesa 50 kg/m^3, calcular el trabajo necesario para bombear todo ese líquido sobre el borde superior del depósito.

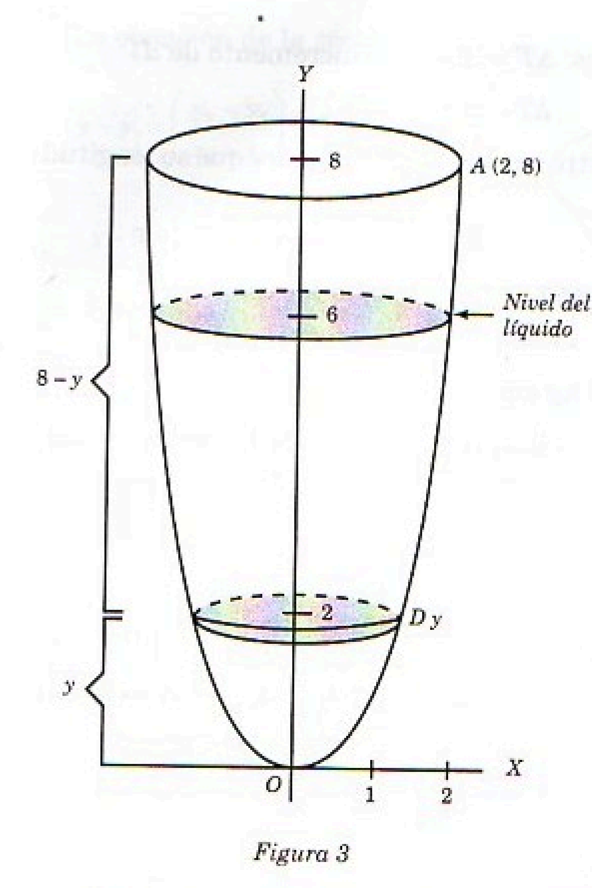


Figura 3

Solución

Considerando el líquido subdividido en *capas* de anchura Δy, podemos determinar el trabajo requerido para bombear cada capa, describiendo primeramente el peso de dicha capa como el incremento de fuerza.

Δf = peso

Δf = (*densidad*)(*volumen de la capa*)

$\Delta f = 50\ (\pi r^2\ h)$

Aquí $r = x$ es el radio y $h = \Delta y$ es la altura.

Entonces, como $y = 2x^2$, es decir, $x^2 = \frac{y}{2}$, tenemos:

$$\Delta f = 50\pi\left(\frac{y}{2}\right)\Delta y = 25\ \pi\ y\ \Delta y$$

Puesto que cada capa se desplaza $8 - y$ metros, el incremento de trabajo es:

ΔT = (*incremento de fuerza*)(*distancia*) $= (25\pi\ y\ \Delta y)\ (8 - y) = \pi\ (200y - 25y^2)\ \Delta y.$

Puesto que las alturas de las diversas capas van desde $y = 0$ hasta $y = 6$, el trabajo requerido para vaciar el depósito es:

$$T = \pi\int_0^6\left(200y - 25y^2\right)dy = 100\pi y^2 - \frac{25\pi y^3}{3}\Bigg]_0^6 = 3600\pi - 1800\pi = \mathbf{5\,654.867\ kgm.}$$

$\therefore$ **El trabajo necesario para el bombeo es de 5 654.867 kgm.**

Trabajo de un gas al dilatarse

Si al dilatarse un gas en un cilindro empuja la cabeza de un émbolo de manera que el volumen del gas pase del volumen inicial en metros cúbicos (V_i) hasta el volumen final en metros cúbicos (V_f), el trabajo exterior que se realiza es, en kilográmetros:

$$\text{Trabajo } (T) = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV, \text{ donde } P \text{ es la presión en kg/m}^2.$$

Lo anterior se demuestra si suponemos que el volumen aumenta de V a $VT\,dV$. Sea

A el área de la sección transversal del cilindro. Entonces $\frac{dV}{A}$ es la distancia que mueve el émbolo. Dado que PA es la fuerza que causa la dilatación dV, tenemos:

$$\text{Elemento del trabajo realizado} = PA\left(\frac{dV}{A}\right) = P\,dV$$

De esta última igualdad se obtiene $T = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$ al aplicar el teorema fundamental del cálculo integral.

Para aplicar $T = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$, debe conocerse la relación entre P y V durante la dilatación. Dicha relación es $PV^n = C$, siendo C y n constantes.

Al constituirse el diagrama de presión y volumen, con los volúmenes como abscisas y las presiones como ordenadas, el área bajo la curva es numéricamente igual al trabajo que se obtiene con $T = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$.

Dilatación isoterma

Si la temperatura permanece constante, se presenta la *dilatación isoterma*. Entonces $n = 1$ y la relación entre la presión y el volumen es: $PV = P_i V_i = P_f V_f$. Su representación gráfica da lugar a una hipérbola equilátera.

EJEMPLOS

1. La dilatación del gas contenido en un depósito cilíndrico desplaza un émbolo de manera que el volumen del gas aumenta de 15 a 25 cm³. Suponiendo que la relación entre la presión (kp/cm²) y el volumen (cm³) viene dada por $PV^{1.4} = 60$, calcular el trabajo realizado en la expansión.

Solución

Sea A el área de la sección del cilindro; en dichas condiciones, la fuerza ejercida por el gas es PA. Un aumento de volumen ΔV hace suponer la elevación del pistón de $\Delta V/A$, donde el trabajo correspondiente a dicho desplazamiento es:

$$PA\left(\frac{\Delta V}{A}\right) = P\Delta V$$

De $PV^{1.4} = 60$, tenemos que $P = \frac{60}{V^{1.4}}$; luego, $P\,\Delta v = \left(\frac{60}{V^{1.4}}\right)\Delta v$.

Entonces: $T = 60\int_{15}^{25} \frac{60}{V^{1.4}} = -\frac{60}{0.4}v^{-0.4}\Big]_{15}^{25} = \left[-150(25)^{-0.4}\right] - \left[-150(15)^{-0.4}\right]$

$$= -41.392 + 50.776 = \mathbf{9.384\ kp\ cm}$$

∴ **El trabajo realizado durante la expansión es de 9.384 kp cm.**

2. Un cilindro contiene un volumen de aire sobre el que se apoya un émbolo. Sabiendo que cuando la presión es de $20\ kp/m^2$ el volumen es de $100\ m^3$, calcular el trabajo realizado por el émbolo para comprimir el aire hasta $2m^3$.

a) Suponiendo que $PV = C$.

b) Suponiendo que $PV^{1.4} = C$.

Solución

a) Considerando que la relación entre la presión y el volumen está dada por $PV = C$, $(20\ kp/m^2)(100\ m^3) = 2\,000$ kp m.

Si A es el área de la sección del cilindro, en tales condiciones la fuerza ejercida por el gas es PA. Una disminución de volumen dV hace suponer la compresión del pistón de $\frac{dV}{A}$, donde el trabajo realizado es: $PA\left(\frac{dV}{A}\right) = P\,dV$.

De $PV = 2\,000$, tenemos que $P = \frac{2\,000}{V}$; luego $P\,dV = \left[\frac{2\,000}{V}\right]dV$.

Entonces: $T = 2\,000\int_{2}^{100} \frac{dV}{V} = [2\,000 \ln V]_{2}^{100} = 9\,210.34 - 1\,386.30 = \mathbf{7824.04\ kp\ m}$

∴ **El trabajo realizado cuando $PV = C$ es de 7824.04 kp m.**

b) Considerando que la relación entre la presión y el volumen está dada por $PV^{1.4} = C$, entonces $(20\ kp/m^2)(100\ m^3)^{1.4} = 12\,619.147$ kg m.

Si A es el área de la sección del cilindro, en tales condiciones la fuerza ejercida por el gas es PA. Una disminución de volumen dV hace suponer una compresión del pistón de $\frac{dV}{A}$, donde el trabajo realizado es: $PA\left(\frac{dV}{A}\right) = P\,dV$.

De $PV^{1.4} = 12\ 619.147$, tenemos que

$$P = \frac{12\ 619.147}{V^{1.4}}; \text{ luego } P\,dV = \left(\frac{12\ 619.147}{V^{1.4}}\right)dV$$

$$\text{Entonces: } T = 12\ 619.147\int_2^{100}\frac{dV}{V^{1.4}} = -\frac{12\ 619.147}{0.4}V^{-0.4}\Big]_2^{100}$$

$T = -31\ 547.868\,(100)^{-0.4} - [-31\ 547.868\,(2)^{-0.4}] = -5000 + 23\ 908.813 =$ **18 908.813 kp m**

$\therefore$ **El trabajo realizado cuando $PV^{1.4} = C$ es de 18908.813 kp m.**

3. Nueve metros cúbicos de aire a la presión de 2 kg/cm² se comprimen a la presión de 8 kg/cm².

a) Calcular el volumen y el trabajo realizado si se aplica la *ley isoterma*, es decir, $PV = C$.

b) Calcular el volumen final y el trabajo realizado si se aplica la *ley adiabática*, es decir, $PV^{1.4} = C$.

Solución

a) Puesto que $P_i = 2$ kg/cm², $V_i = 9\text{m}^3 = 9\,000\,000$ cm³ y $P_f = 8$ kg/cm², entonces por:

$P_iV_i = P_fP_f$, tenemos que $V_f = \frac{P_iV_i}{P_f} = \frac{(2\text{ kg/cm}^2)(9\ 000\ 000\text{ cm}^3)}{8\text{ kg/cm}^2}$

$\therefore$ **$V_f = 2\ 250\ 000$ cm³ = 2.25 m³**

Considerando que la relación entre la presión y el volumen está dada por $PV = C$, es decir, (2 kg/cm²) (9 000 000 cm³) = 18 000 000 kg cm = 180 000 kg m.

De $PV = 180\ 000$, tenemos que: $P = \frac{180\ 000}{V}$.

Entonces $T = 180\ 000\int_{2.25}^{9}\frac{dV}{V} = [180000\ln V]_{2.25}^{9} =$ **249 532.985 kg m**

$\therefore$ **El volumen final y el trabajo realizado aplicando la *ley isoterma* es 2.25 m³ y 249 532.985 kg m, respectivamente.**

b) Puesto que $P_i = 2$ kg/cm², $V_i = 9\text{m}^3 = 9\ 000\ 000$ cm³, $P_f = 8$ kg/cm², entonces por:

$P_i(V_i)^{1.4} = P_f(V_f)^{1.4}$, tenemos que: $V_f = \sqrt[1.4]{\frac{P_i(V_i)^{1.4}}{P_f}} = \sqrt[1.4]{\frac{(2)(9000000)^{1.4}}{8}}$

$\therefore$ **$V_f = 3\ 343\ 487.13$ cm³ = 3.343 m³**

Considerando que la relación entre la presión y el volumen está dada por $PV^{1.4} = C$, tenemos $(2\ \text{kg/cm}^2)(9\text{m}^3)^{1.4} = (20\ 000\ \text{kg/m}^2)(9\text{m}^3)^{1.4} = 433\,480.4$ kg m.

De $PV^{1.4} = 433\ 480.4$, tenemos que: $P = \dfrac{433\ 480.4}{V^{1.4}}$.

Entonces $T = 433\ 580.4 \int_{3.343}^{9} \dfrac{dV}{V^{1.4}} = -\dfrac{433\ 480.4}{0.4} V^{-0.4} \Big]_{3.343}^{9}$ $= \mathbf{218\,736.384\ kg\,m}$

∴ **El volumen final y el trabajo realizado aplicando la *ley adiabática* es 3.343 m³ y 218 736.384 kg m, respectivamente.**

EJERCICIO XXX

I. Resolver los siguientes problemas.

1. Una fuerza de 5 kg comprime un muelle de 30 cm un total de 8 cm. ¿Qué trabajo hace falta para comprimirlo 14 cm?
2. Una fuerza de 60 kg extiende 3 cm un cierto muelle. Calcular el trabajo realizado al extenderlo desde 27 hasta 45 cm.
3. Un tanque semiesférico de 6 m de radio está colocado de forma que su base es el círculo. A la altura de su base tiene un manantial de agua.
   a) ¿Cuánto trabajo se requiere para llenarlo por un orificio en su punto más alto?
   b) ¿Y por un orificio hecho en su base?
   c) Si se invierte el tanque, calcular el trabajo requerido al bombear los 2m de agua más altos por un orificio hecho en su parte superior.
4. Un depósito abierto tiene forma de cono circular de 6 m de altura y 8 m de ancho en su parte superior. Hallar el trabajo necesario para vaciarlo bombeando por su parte superior.
5. Si se bombea el agua por el fondo al interior del depósito del problema anterior, ¿cuánto trabajo se necesita para llenarlo?
   a) Hasta una altura de 2 m   b) Desde 4m hasta 6m de altura
6. Un tanque circular lleno de agua, de 12 m de alto y 8 m de radio, se entierra hasta que su borde superior quede 3 m bajo el nivel del piso. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear toda el agua hasta el nivel del piso?

7. Una cisterna cilíndrica vertical de 5 m de diámetro y 8 m de profundidad está llena de agua.

   a) Calcular el trabajo al bombear el agua hasta el borde de la cisterna.

   b) Si la cisterna está medio llena, calcular el trabajo de bombear el agua al borde.

8. Una cisterna cónica, que tiene 8 m de diámetro superior y 8 m de profundidad, está llena de agua. Calcular el trabajo de subir el agua 7 m más alto que el borde.

9. Un tanque hemisférico de 4 m de diámetro está lleno de petróleo que pesa 800 kg/m^3. Calcular el trabajo requerido para bombear el petróleo al borde del tanque.

10. Un tanque para agua tiene la forma de un hemisferio de 10 m de diámetro coronado de un cilindro del mismo diámetro y de 5 m de altura. Calcular el trabajo que se hace al vaciarlo con una bomba cuando está lleno hasta 3.5 m por debajo del borde.

11. Un aljibe cónico que tiene 3 m de diámetro superior y 4 m de profundidad está lleno de un líquido que pesa 1280 kg/m^3. Calcular el trabajo de bombear el líquido al borde del aljibe.

12. Una grúa de demolición tiene una bola de 500 kg suspendida de un cable de 40 m, cuya densidad es 0.7 kg/m. Calcular el trabajo necesario para enrollar 15 m de cadena.

13. Una cadena de 15 pies de largo y que pesa 3 libras/pie está suspendida verticalmente desde 15 pies de altura. ¿Cuánto trabajo hace falta para elevar toda la cadena hasta 15 pies de altura?

14. Un resorte tiene una longitud natural de 12 cm. La *ley de Hooke* establece que, cuando un resorte se extiende x centímetros, éste ejerce una fuerza igual a kx, donde k es una constante. Si se necesitan 10 dinas de fuerza para mantenerlo extendido 1/2 cm, ¿qué cantidad de trabajo será necesario para extenderlo desde su longitud natural hasta una longitud de 16 cm^3?

15. Un módulo lunar pesa 12 toneladas en la superficie terrestre. Calcular el trabajo consumido en propulsarlo hasta una altura de 50 millas desde el suelo lunar. Tómese el radio de la luna como 1100 millas aproximadamente y su fuerza de gravedad igual a 1/6 de la terrestre.

16. Un acuario tiene una base rectangular de 0.6 m de ancho y 1.2 m de largo y lados rectangulares de 0.9 m de altura. Si el acuario está lleno de agua, ¿cuánto trabajo se requiere para vaciarlo bombeando el agua por la parte de arriba?

17. Un cilindro de 20 cm de diámetro y 80 cm de longitud está lleno de vapor bajo la presión de 10 kg/cm^2, ¿qué trabajo es necesario realizar para disminuir dos veces el volumen del vapor, suponiendo que la temperatura del mismo permanece constante?

18. Seis metros cúbicos de aire a la presión de 1 kg/cm³ se comprimen a la presión de 5 kg/cm³.

   a) Determínese el volumen final, y el trabajo realizado si se aplica la ley isoterma, es decir, $PV = C$.

   b) Determínese el volumen final y el trabajo que se ha hecho si se aplica la ley adiabática, es decir, $PV^n = C$, suponiendo $n = 1.4$.

19. Una masa de aire a la presión de 1 kg/cm² se comprime de 8 m³ a 2 m³.

   a) Determínese la presión final y el trabajo realizado si la ley es $PV = C$.

   b) Si la ley es $PV^n = C$, suponiendo $n = 1.4$.

20. Una masa de gas con volumen inicial de medio metro cúbico y presión de 4 kg/cm² se dilata hasta que la presión es 2 kg/cm².

   a) Determínese el volumen final y el trabajo hecho por el gas si la ley es $PV = C$.

   b) Si la ley es $PV^n = C$, suponiendo $n = 1.2$.

21. Una masa de aire con volumen inicial de 5.5 m³ y presión de 1 kg/cm² se comprime a 1.2 m³.

   a) Determínese la presión final y el trabajo que se ha hecho si la ley es $PV = C$.

   b) Si la ley es $PV^n = C$, suponiendo $n = 1.4$.

22. Un gas se dilata de una presión inicial de 5.5 kg/cm² y volumen de 70 litros al volumen de 250 litros.

   a) Calcular el trabajo que se ha hecho si la ley es $PV^n = C$, suponiendo $n = 1.0646$.

   b) Si $n = 1.131$.

RESPUESTAS A ALGUNOS EJERCICIOS

EJERCICIO I

(I)

1. $dy=-0.2$
3. $dy=-0.5$
5. $dy=-0.063$
7. $-dy=0.07056$

(II)

1. $dA=2.26\ \text{cm}^2$
3. $dA=16dx$
5. $dv=424\,115\ \text{mm}^3$

(III)

1. $\sqrt[3]{65} = 4.020833$
3. $\sqrt[4]{83} = 3.0185185$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{50}} = 0.115859$
7. $\ln 5.83 = 1.775437$
9. $\cos 44° = 0.7194479$
11. $\text{ctg } 29° = 1.8018628$
13. $-\ln 36.4 = 3.594630$
15. $e^{5.1} = 163.254475$

(IV)

1. $dy = 2\,(2x^3 - 3x^2 + 5x - 1)\,dx$
3. $dy = -\dfrac{3x\,dx}{\sqrt{1-3x^2}}$
5. $dy = -\dfrac{4x\,dx}{3\left(4-2x^2\right)^{2/3}}$
7. $dy = \dfrac{x\left(1-3x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx$
9. $dy = 5^{mx}\ln 5\,dx$
11. $dy = \dfrac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{2\sqrt{x}}$

13. $dy = \frac{x\,dx}{1+x^2}$

15. $dy = \left(\frac{a \log e}{ax+b}\right) dx$

17. dy = – 4 sen 2x d

19. $dy = -\csc x\,(x \operatorname{ctg} x - 1)\,dx$

21. $dy = \frac{2x\,dx}{x^2-2x+2}$

23. $dy = -\frac{5 \operatorname{sen} 5x\, dx}{2\sqrt{\cos 5x}}$

25. $dy = -\frac{2a^2x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}\sqrt{a^2-x^2}}$

27. $dy = \left(\frac{-3x-y}{x+5y}\right) dx$

29. $dy = \left(\frac{-x-\sqrt{\frac{x}{y}}}{\sqrt{\frac{x}{y}}+1}\right) dx$

31. $dy = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\, dx$

33. $dy = \left(\frac{y^2-6x^2}{6-2xy}\right) dx$

35. $dy = -\frac{3\left(1-4x^2\right)dx}{\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}}$

EJERCICIO II

(II) 1. a) $\sum_{k=1}^{5}(z_k-1)^3 = (z_1-1)^3+(z_2-1)^3+(z_3-1)^3+(z_4-1)^3+(z_5-1)^3$

c) $\sum_{k=1}^{7}(x_k-y_k) = (x_1-y_1)+(x_2-y_2)+(x_3-y_3)+(x_4-y_4)+(x_5-y_5)+(x_6-y_6)+(x_7-y_7)$

3. a) $\sum_{k=1}^{8}(5_k-3) = 156$ c) $\sum_{K=1}^{4}\left(\frac{k}{k-1}\right) = 4\frac{5}{6}$ e) $\sum_{J=-1}^{3}\left(\frac{1}{J^2+1}\right) = 2\frac{2}{10}$

5. a) Área = 22.992 unidades cuadradas. c) Área = 22.5 unidades cuadradas.

f) Área = 2/3 unidades cuadradas.

7. a) 63.75 c) 1.0986 e) 18 g) 39 i) – 7.5

EJERCICIO III

(II) 1. a) 5; 45 c) 0; 125 f) 2.565; 3.688

3. a) $\int_0^2 x^3\,dx = f\left(\sqrt[3]{2}\right)(2)$ c) $\int_{-2}^2 x^4\,dx = f(1.396)(4)$

EJERCICIO IV

(II) 1. a) Área = 9 b) Área = $23\frac{1}{3}$ e) Área = $25\frac{1}{3}$

EJERCICIO V

(II) 1. $\frac{3x^{8/3}}{8} - \frac{6x^{5/2}}{5} + \frac{14x^{3/2}}{3} - 5x + C$

2. $2\sqrt{e^x + \text{sen}\, ax} + C$

3. $\frac{6x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} + C$

4. $\frac{2(\text{arc sen}\, x)^{3/2}}{3} + C$

5. $\frac{8\sqrt{x^3+8}}{3} + C$

6. $\frac{x^3}{3a} + \frac{a}{x} + C$

7. $\frac{\ln\left(x^2+6x\right)}{2} + C$

8. $\frac{\text{sen}^5 3x}{15} + C$

9. $\frac{\ln(a - b\,\text{ctg}\, ax)}{ab} + C$

10. $\frac{2\ln(1+3x)}{3} + C$

11. $2\sqrt{x} + C$

12. $\ln(1 + \text{sen}^2 x) + C$

13. $x^2 + C$

14. $\frac{2(\text{arc tg}\, x)^{3/2}}{3} + C$

15. $\frac{2a^2 x^{3/2}}{3} - \frac{4x^{5/2}}{5} + \frac{2x^{7/2}}{7} + C$

16. $\frac{\ln\left(9+x^2\right)}{2} + C$

17. $\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{6x^{5/3}}{5} + \frac{10x^{3/2}}{d} - 3x + C$

18. $-\frac{\left(4-x^{3/2}\right)^4}{6} + C$

19. $\frac{\ln^2 mx}{2}+C$

20. $-\frac{(1+2\cos ax)^{3/2}}{3a}+C$

21. $\ln(\ln ax)+C$

22. $\frac{(\ln^2+\operatorname{sen} x)}{2}+C$

23. $\frac{\ln^2 \operatorname{sen} x}{3}+C$

24. $-\frac{2(\operatorname{arc}\cos x)^{3/2}}{3}+C$

25. $-\frac{1}{\ln x}+C$

26. $\ln(a+\sec x)+C$

27. $\frac{\ln(5-e^{-2x})}{2}+C$

28. $\frac{x^2}{2a}+C$

29. $\frac{2x^{3/2}}{3}-x^2+\frac{2x^{5/2}}{5}+C$

30. $2\ln x = C$

31. $\ln(e^x-\operatorname{sen} x)+C$

32. $-[x+3\ln(3-x)]+C$

33. $-\frac{\ln^2\cos x}{2}+C$

34. $\sqrt{e^{ax}-9}+C$

35. $\frac{(\operatorname{arc}\operatorname{tg} 2x)^2}{4}+C$

36. $-\frac{(\operatorname{arc}\operatorname{ctg} 3x)^2}{6}+C$

EJERCICIO VI

(II) 1. $-\frac{1}{2e^{2x}}+C$

2. $\frac{e^{x^2}}{2}+x^2+C$

3. $-\frac{1}{a\,10^{ax}\ln 10}+C$

4. $-\frac{8}{\sqrt{a^x}\ln a}+C$

5. $-\frac{2}{\sqrt{2e^x}}+C$

6. $\frac{e^{2x^3}}{6}+C$

7. $\frac{e^{2\ln x}}{2}+C$

8. $\frac{3e^{\frac{5x}{3}}}{5}+C$

9. $2\sqrt{2e^x}+C$

10. $-\frac{1}{3(8x^3\ln 8)}+C$

11. $x-\cos x+C$

12. $\frac{b^{(4x^2-2x)}}{4\ln b}+C$

13. $-\frac{1}{e^{\operatorname{tg} x}}+C$

14. $\frac{e^{\operatorname{sen} 3x^2}}{6\ln g}+C$

15. $-\frac{e^{\operatorname{ctg} ax}}{a}+C$

16. $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{ax}}{a\ln\frac{3}{5}}+C$

17. $\frac{a^{mx}e^{mx}}{m(\ln a+1)}+C$

18. $e^{(ax^2+bx+c)}+C$

19. $\frac{1}{2a}\left(e^{2ax}-\frac{1}{e^{2ax}}\right)-2x+C$

20. $\frac{e^{2x}}{2}-2e^{x}+x+C$

EJERCICIO VII

(II) 1. $\frac{\ln^2 \operatorname{sen} z}{2}+C$

2. $-\ln(1+\cos^2 x)+C$

3. $-\ln(1+\operatorname{sen}^2 x)+C$

4. $x+\operatorname{sen} x+C$

5. $\frac{\operatorname{sen}^4 e^x}{4}+C$

6. $2\left(\operatorname{tg}\sqrt{t}-\sqrt{t}\right)+C$

7. $\frac{1}{2}\ln\left(\sec x^2+\operatorname{tg} x^2\right)+C$

8. $-\ln(\operatorname{ctg} y+1)+C$

9. $-\frac{1}{e^{\operatorname{tg}\theta}}+C$

10. $x+\ln\sec x+C$

11. $x-\cos x+C$

12. $-\frac{(1+2\cos 2z)^{3/2}}{6}+C$

13. $\frac{\operatorname{tg}^2 mx}{2m}+C$

14. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{3}+C$

15. $\frac{\sec 2x}{2}+C$

16. $\frac{1}{a}\ln tg\, ax+C$

17. $\frac{\operatorname{ctg} a\theta}{a}-\frac{\csc a\theta}{a}+\theta+C$

18. $\frac{e^{\operatorname{tg} mx}}{m}+C$

19. $\frac{e^{2\operatorname{sen} ax}}{2a}+C$

20. $\frac{\operatorname{sen}^4 2ax}{8a}+C$

EJERCICIO VIII

(II)

1. $\frac{1}{2}\text{arc tg}\left(\frac{\text{sen } x}{2}\right)+C$

2. $\text{arc sen}\left(\frac{\ln x}{3}\right)+C$

3. $-\frac{2}{3}\ln\left(\cos^{3/2} x+\sqrt{\cos^3 x+9}\right)+C$

4. $\frac{1}{9}\ln\left(\frac{2+3x^3}{2-3x^3}\right)+C$

5. $\frac{2}{3}\ln\left(\text{sen}^{3/2}x+\sqrt{\text{sen}^3 x+16}\right)+C$

6. $-\frac{1}{3}\text{arc tg}\left(\frac{\text{ctg } x}{3}\right)+C$

7. $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3x-5}{3x+5}\right)+C$

8. $\frac{1}{a}\text{arc sen}\left(\frac{\text{tg } ax}{4}\right)+C$

9. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2x^2}{1-2x^2}\right)+C$

10. $\text{Arc tg}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

11. $\frac{3}{8}\text{arc tg}\frac{x}{2}+C$

12. $\text{arc sen}\left(\frac{\text{sen } x}{3}\right)+C$

13. $\frac{3}{10}\ln\left(\frac{x-5}{x+5}\right)+C$

14. $-\ln\left(\cos x+\sqrt{\cos^3 x-4}\right)+C$

15. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\text{tg } x}{2-\text{tg } x}\right)+C$

16. $\ln\left(\ln x+\sqrt{(\ln x)^2+9}\right)+C$

17. $\frac{2}{3}\ln\left(\ln^{3/2}+x+\sqrt{\ln^3 x+8}\right)+C$

18. $-\frac{1}{2}\text{arc tg}\left(\frac{\text{ctg } x}{2}\right)+C$

19. $\ln\left[(x-6)+\sqrt{16+(x-6)^2}\right]+C$

20. $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-4}\right)+C$

21. $\frac{y}{2}\sqrt{3y^2-1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\,y+\sqrt{3y^2-1}\right)+C$

22. $\frac{(3z+1)}{6}\sqrt{(3z+1)^2-2}-\frac{1}{3}\ln\left[(3z+1)+\sqrt{(3z+1)^2-2}\right]+C$

23. $\frac{\theta}{2}\sqrt{3\theta^2-10}-\frac{5}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\,\theta+\sqrt{3\theta^2-10}\right)+C$

24. $\frac{u}{2}\sqrt{7-5u^2}+\frac{7}{2\sqrt{5}}\text{arc sen}\sqrt{\frac{5}{7}}\,u+C$

25. $-\dfrac{\cos 3x}{6}\sqrt{\cos^2 3x+4}-\dfrac{2}{3}\ln\left(\cos 3x+\sqrt{\cos^2 3x+4}\right)+C$

26. $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-c^2}-\dfrac{c^2}{2a}\ln\left(ax+\sqrt{a^2x^2-c^2}\right)+C$

27. $\dfrac{y}{2}\sqrt{1+a^2y^2}+\dfrac{1}{2a}\ln\left(ay+\sqrt{1+a^2y^2}\right)+C$

28. $\dfrac{a}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+b^4}\right)+C$

29. $\dfrac{x^2}{4}\sqrt{11+7x^4}+\dfrac{11}{4\sqrt{7}}\ln\left(\sqrt{7}\,x^2+\sqrt{11+7x^4}\right)+C$

30. $\dfrac{(x-1)}{2}\sqrt{(x-1)^2-7}-\dfrac{7}{2}\ln\left[(x-1)+\sqrt{(x-1)^2-7}\right]+C$

31. $\dfrac{x}{2}\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}+4\,\text{arc sen}\,\dfrac{x}{4}+C$

32. $\dfrac{x}{2}\sqrt{5+3x^2}+\dfrac{5}{2\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\,x+\sqrt{5+3x^2}\right)+C$

33. $\dfrac{x}{2}\sqrt{8-3x^2}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\,\text{arc sen}\sqrt{\dfrac{3}{8}}\,x+C$

34. $\dfrac{\text{sen}\,2x}{4}\sqrt{\text{sen}^2 2x+9}+\dfrac{9}{4}\ln\left(\text{sen}\,2x+\sqrt{\text{sen}^2 2x+9}\right)+C$

35. $-\dfrac{\cos 2x}{4}\sqrt{\cos^2 2x+16}-4\ln\left(\cos 2x+\sqrt{\cos^2 2x+16}\right)+C$

36. $\dfrac{(2x-1)}{4}\sqrt{8-\left(\sqrt{2}x-1\right)^2}+2\,\text{arc sen}\,\dfrac{(2x-1)}{2\sqrt{2}}+C$

37. $\dfrac{t}{2}\sqrt{4-9t^2}+\dfrac{2}{3}\,\text{arc sen}\,\dfrac{3t}{2}+C$

38. $\dfrac{t^2}{4}\sqrt{5t^4+3}+\dfrac{3}{4\sqrt{5}}\ln\left(t^2+\sqrt{5t^4+3}\right)+C$

39. $\frac{x^3}{6}\sqrt{25-x^6}+\frac{25}{6}\text{ arc sen }\frac{x^3}{5}+C$

40. $\frac{1}{3}\text{ arc sec }\frac{2t}{3}+C$

41. $\frac{1}{4}\text{ arc sec }\frac{x}{4}+C$

42. $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{ arc sec }\frac{\theta}{\sqrt{5}}+C$

43. $\frac{1}{2}\text{ arc sec }\frac{2x}{\sqrt{2}}+C$

44. $\frac{x^2}{4}\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{4}\text{ arc sen }x^2+C$

EJERCICIO IX

(II)

1. $\text{arc tg}(2x+1)+C$

3. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2x-3-\sqrt{2}}{2x-3+\sqrt{2}}\right)+C$

5. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)+C$

7. $\frac{1}{8}\ln\left(\frac{x-8}{x}\right)+C$

9. $\text{arc sen }\frac{(x-2)}{4}+C$

11. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)+C$

13. $\frac{1}{12}\ln\left(\frac{3+x}{9-x}\right)+C$

15. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)+C$

17. $\frac{(x+6)}{2}\sqrt{28-12x-x^2}+32\text{ arc sen }\frac{(x+6)}{8}+C$

19. $\frac{(2x+1)}{4\sqrt{2}}\sqrt{2x^2+2x+5}+\frac{9}{2\sqrt{2}}\ln\left[(2x+1)+\sqrt{(2x^2+2x+5)}\right]+C$

21. $\frac{(y-4)}{2}\sqrt{20+8y-y^2}+18\text{ arc sen }\frac{(y-4)}{6}+C$

23. $\frac{(x^2+3)}{4}\sqrt{x^4+6x^2+9}-\ln\left[(x^4+3)+\sqrt{x^4+6x^2+9}\right]+C$

25. $\frac{1}{5}\ln(4+25x^2)-\frac{3}{10}\text{ arc tg }\frac{5x}{2}+C$

27. $5\text{ arc sen }\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}+C$

29. $\frac{1}{2}\ln\left(9x^2+12x+3\right)\frac{7}{2}\ln\left(\frac{3x+1}{3x+3}\right)+C$

31. $\sqrt{x^2-5x+3}-\frac{3}{2}\ln\left[(x-5/2)+\sqrt{x^2-5x+3}\right]+C$

33. $-\frac{1}{2}\ln\left(1-x-x^2\right)+\frac{5}{2\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+2x+1}{\sqrt{5}-2x-1}\right)+C$

35. $\frac{1}{6}\ln\left(9x^2+6x+3\right)+\frac{7}{3\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}+C\right)$

EJERCICIO X

(II) 1. $\frac{1}{5}\ln\left(\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right)+C=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{x}{2\sqrt{25-x^2}}\right)+C$

3. $-\left(\frac{\sqrt{9-y^2}}{y}+\text{arc sen}\,\frac{y}{3}\right)+C$

5. $\frac{\sqrt{x^2-5}}{5x}+C$

7. $\frac{1}{2}\text{arc sen}\,\frac{z}{2}+C$

9. $\frac{x}{2}\sqrt{6+x^2}-3\ln\left(\frac{\sqrt{6+x^2}+x}{\sqrt{6}}\right)+C$

11. $\frac{3\sqrt{u^2+25}-\left(u^2+25\right)^{3/2}}{1875\,u}+C$

13. $-\frac{1}{4e^x\sqrt{16e^{-2x}+4}}+C$

15. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$

EJERCICIO XI

(II) 1. $-\frac{\csc x\,\text{ctg}\,x}{2}+\frac{\ln\left(\csc x-\text{ctg}\,x\right)}{2}+C$

3. $2z \operatorname{tg}\frac{z}{2} + 4 \ln \cos\frac{z}{2} + C$

5. $x \operatorname{arc} \cos mx - \frac{\sqrt{1 - m^2 - x^2}}{m} + C$

7. $\frac{e^{2\theta}}{2} + 4\theta e^{\theta} - 4e^{\theta} + \frac{4\theta^3}{3} + C$

9. $\frac{x^4 \log x}{x} - \frac{x^4 \log e}{16} + C$

11. $x \operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) + C$

13. $x \operatorname{arc} \sec\frac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2} + C$

15. $\frac{x^4}{4}\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$

17. $\frac{2e^{-x}\left(\cos\frac{x}{2} + 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{3} + C$

19. $\frac{-3e^{y/3}(3\pi \cos \pi y - \operatorname{sen} \pi y)}{9\pi^2 + 1} + C$

21. $\frac{4e^{x/4}(4\pi \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x)}{16\pi^2 + 1} + C$

23. $t \operatorname{arc} \cos\sqrt{\frac{t}{2}} - \sqrt{\frac{2t - t^2}{2}} + \frac{1}{2}\operatorname{arc} \operatorname{sen}(t - 1) + C$

25. $x \operatorname{arc} \operatorname{ctg}\frac{x}{4} + 2 \ln\left(16 + x^2\right) + C$

27. $x \log^2 x - 2x \log e \log x + 2x \log^2 e + C$

29. $\frac{2x^{3/2}}{3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$

31. $x(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^2 - 2\sqrt{x^2 - 1} \operatorname{arc} \sec x + 2 \ln x + C$

33. $-\frac{ae^{bx}\cos ax + be^{bx} \operatorname{sen} ax}{a^2 + b^2} + C$

35. $x \operatorname{arc} \operatorname{verso} x + \sqrt{2x - x^2} - \operatorname{arc} \sec(x - 1) + C$

EJERCICIO XII

1. $\frac{3}{t}+4\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)+C$

3. $\ln\left[\frac{z}{(z+2)(z+1)}\right]+C$

5. $2\ln\left(\frac{t+2}{t+1}\right)+3\ln(t+3)+C$

7. $\frac{1}{2}\ln(2y+1)+\frac{12}{(y+2)}+4\ln(y+2)+C$

9. $2\ln(x+1)-\ln(x+2)(x+3)+C$

11. $\frac{1}{2}\ln(x+1)(x-1)-\ln x+C$

13. $\frac{9}{64}\ln(2z+3)+\frac{1}{64}\ln(2z-1)-\frac{1}{32}\ln(2z+1)+C$

15. $\ln y+2\ln(y+3)(y-3)+C$

17. $2\ln\ (2x-1)+\frac{3}{2(2x+1)}+\ln(2x+1)+C$

19. $3\ln\left(\frac{z+1}{z}\right)-\frac{1}{(z+1)}-\frac{2}{z}+C$

21. $-2\ln(y+2)+\ln(y^2+1)+\text{arc tg}\ y\ +C$

23. $\ln\left(x^2-4\right)+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)+C$

25. $\ln(x+3)+\text{arc tg}\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)+C$

27. $\frac{3}{2}\ln(x+1)-\frac{3}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2}\text{arc tg}\,x+C$

29. $\frac{1}{\left(x^2+4\right)}+2\ln\left(x^2+4\right)+\frac{3}{2}\text{arc tg}\,\frac{x}{2}+C$

31. $2\ln(y+2)-\text{arc tg}(y+1)+C$

33. $-\frac{1}{2\left(e^{2y}+1\right)}+\text{arc tg}\,e^x+C$

35. $\frac{1}{20}\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)+\frac{1}{30}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)+C$

37. $\ln t+\frac{(2-t)}{2\left(t^2+1\right)}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\frac{1}{2}\text{arc tg}\,t+C$

39. $-\frac{5}{\sqrt{5}}\text{arc tg}\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(y^2+2y+3\right)+\frac{5}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\,\frac{(y+1)}{\sqrt{2}}+C$

41. $-\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$

43. $-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$

45. $-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{3}{2}\ln(x-1)+C$

47. $\frac{1-3t-6t^2}{6t^3}+2\ln t-\ln(2t-1)+C$

EJERCICIO XIII

(II)

1. $3\ln\left(\frac{t^{1/3}}{1-t^{1/3}}\right)+C$

3. $\frac{\sqrt{4x+1}}{2}+\frac{1}{2(4x+1)0}-\frac{1}{6(4x+1)^{3/2}}+C$

5. $\frac{2t^{9/4}}{27}-\frac{2t^{11/2}}{11}+C$

7. $\frac{(x-1)\sqrt{2+4x}}{6}+C$

9. $2\,\text{arc tg}\sqrt{x+1}+C$

11. $3\sqrt[4]{2x}-9\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt[4]{2x}}{3}+C$

13. $-4\sqrt[4]{t-2}+4\ln\left(1-\sqrt[4]{t-2}\right)+C$

15. $2\sqrt{t-3}+\frac{4}{3}\text{arc tg}\sqrt{\frac{t-3}{3}}+C$

EJERCICIO XIV

(II) 1. $\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$

3. $-\dfrac{3\left(\cos x\right)^{2/3}}{2}+\dfrac{3\left(\cos x\right)^{8/3}}{4}-\dfrac{3\left(\cos x\right)^{14/3}}{14}+C$

5. $-\dfrac{\cos 3x}{3}+\dfrac{\cos^3 3x}{3}-\dfrac{\cos^5 3x}{5}+\dfrac{\cos^7 3x}{21}+C$

7. $\dfrac{\operatorname{sen} mx}{m}-\dfrac{2\operatorname{sen}^3 mx}{3m}+\dfrac{\operatorname{sen}^5 mx}{5m}+C$

9. $-\dfrac{2(\cos x)^{3/2}}{3}+\dfrac{2(\cos x)^{7/2}}{7}+C$

11. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 t}{3}-\dfrac{2\operatorname{sen}^5 t}{5}+\dfrac{\operatorname{sen}^7 t}{7}+C$

13. $-\dfrac{\cos^4 2\theta}{8}+\dfrac{\cos^6 2\theta}{6}-\dfrac{\cos^8 2\theta}{16}+C$

15. $\dfrac{\sec^3 x}{3}-\sec x+C$

17. $-\dfrac{3(\cos 2y)^{4/3}}{8}+\dfrac{3(\cos 2y)^{10/3}}{20}+C$

19. $\dfrac{\operatorname{sen}^6 2x}{6}+\dfrac{\operatorname{sen}^8 2x}{4}+\dfrac{\operatorname{sen}^{10} 2x}{10}+C$

21. $\dfrac{\operatorname{sen}^8 x}{8}-\dfrac{\operatorname{sen}^{10} x}{10}+C$

EJERCICIO XV

(II) 1. $\frac{5x}{16}-\frac{\operatorname{sen} 2mx}{4m}+\frac{3\operatorname{sen} 4mx}{64m}+\frac{\operatorname{sen}^3 2mx}{48m}+C$

3. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}+\frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}C$

5. $\frac{x}{16}-\frac{a\operatorname{sen}^{\frac{4y}{a}}}{64}-\frac{a\operatorname{sen}^{\frac{2x}{a}}}{48}+C$

7. $\frac{5x}{2}-4\cos x-\frac{3\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{\cos^3 x}{3}+C$

9. $2y+\frac{\operatorname{sen} 2y}{2}-\frac{\operatorname{sen} 4y}{2}+\frac{4(\cos 2y)^{3/2}}{3}+C$

11. $\frac{7x}{8}-\frac{2\cos^3 x}{3}+\frac{\operatorname{sen} 4x}{32}+C$

EJERCICIO XVI

(II) 1. $-\frac{\operatorname{sen} 10x}{20}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C$

3. $-\frac{\cos 10t}{20}+\frac{\cos 2t}{4}+C$

5. $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}+C$

7. $z-\frac{\operatorname{sen} 6z}{12}+\frac{\operatorname{sen} 5z}{5}-\operatorname{sen} z-\frac{\operatorname{sen} 4z}{8}+C$

9. $y-\frac{\operatorname{sen} 2by}{4b}+\frac{\cos (a+b)y}{(a+b)}-\frac{\cos (a-b)y}{(a-b)}+\frac{\operatorname{sen} 2ay}{4a}+C$

11. $5\theta-\frac{\operatorname{sen} 8\theta}{16}-\frac{3\operatorname{sen} 5\theta}{5}+\operatorname{sen}\theta-\frac{9\operatorname{sen} 2\theta}{4}+C$

EJERCICIO XVII

(II)

1. $\frac{2\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}}{3} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + x + C$

3. $\frac{\operatorname{ctg}^2(a-bx)}{2b} + \frac{\ln \operatorname{sen}(a-b)}{b} + C$

5. $\frac{\operatorname{ctg}^2 z}{2} - \frac{\csc^4 z}{4} + C$

7. $2\ln\sec\theta + 3\operatorname{tg}\theta + \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{2} - 2\theta + C$

9. $-\frac{ctg^3\theta}{3} + \operatorname{ctg}\theta + \theta + C$

11. $\frac{\operatorname{tg}^2 bt}{2b} + \frac{2\ln\sec bt}{b} - \frac{4\ln\operatorname{sen} bt}{b} - \frac{\operatorname{ctg}^2 bt}{2b} + C$

13. $\frac{\sec^4(m+nx)}{4n} - \frac{\operatorname{tg}^2(m+nx)}{n} + \frac{\ln\sec(m+nx)}{n} + C$

15. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 2x}{6} + C$

17. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$

EJERCICIO XVIII

(II)

1. $\operatorname{tg} x + 2\ln\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$

3. $4\operatorname{tg}\theta + \frac{2\operatorname{tg}^3\theta}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\theta}{5} - 10\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{ctg}^3\theta - \frac{2\operatorname{ctg}^3\theta}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5\theta}{5} - 6\theta + C$

5. $\frac{19x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$

7. $\frac{\operatorname{tg} my}{m} + \frac{\operatorname{tg}^3 my}{3m} + C$

9. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C$

11. $-\frac{\operatorname{ctg} 6x}{6} - \frac{\operatorname{ctg}^3 6x}{18} + C$

EJERCICIO XIX

(II)

1. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln \operatorname{ctg} x + C$

3. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3} + C$

5. $\frac{2\csc^{5/2}\theta}{5} - \frac{2\csc^{9/2}\theta}{9} + C$

7. $-\frac{\operatorname{ctg}^5 3y}{15} - \frac{\operatorname{ctg}^7 3y}{21} + C$

9. $\csc^3 \frac{x}{3} - \frac{3\csc^{5\frac{x}{3}}}{5} + C$

11. $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$

13. $-\frac{2\csc^{3/2} x}{3} - 2\sqrt{\operatorname{sen} x} + C$

15. $\frac{\sec^7\theta}{7} - \frac{\sec^5\theta}{5} + C$

17. $-\frac{2\operatorname{ctg}^{5/2} az}{5a} - \frac{2\operatorname{ctg}^{7/2} az}{7a} + C$

19. $-2\sqrt{\csc x} + C$

21. $-\frac{\operatorname{ctg}^6 2x}{12} + C$

EJERCICIO XX

(IV)

1. $y = \frac{11}{2}$

3. $y = \frac{784}{3}$

5. $A = \frac{8p^2}{3}$

7. $y = x\ln x - 2x + 2$

9. $x^2 + y^2 = 25$

11. $\ln y = \ln\sqrt{x^2+4} + \ln 2 - \ln\sqrt{5}$

13. $(3+y)^{3/2} = (2+x)^{3/2} + 19$

(V)

1. $s = \frac{t^3}{3} - \frac{1}{t} - \frac{157}{12}$

3. $v = -\frac{1}{t} - \frac{t^2}{2} + \frac{133}{6}$

13. a) $x = \frac{t^3}{3} - 4t,\ y = 2t^2$

    c) $72x^2 - y^3 + 48y^2 - 57\ 6y = 0$

EJERCICIO XXI

(III) 1. 26   9. 0.469   15. 0.468   21. $\frac{814}{105}$ 27. $1-\pi/4$ 33. $\frac{104}{5}$

3. 2   11. $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}$ 17. 0.316   23. $-\frac{34}{9}$ 29. 0   35. -8

5. $\frac{a^2\pi}{4}$ 13. 0.326   19. $\frac{116}{15}$ 25. $\pi/4$ 31. $-\frac{40}{7}$

EJERCICIO XXII

(I) 1. 18   3. 64   5. 15.75   7. 4   9. $\frac{116}{15}$ 11. 5.2732

13. 7 1/3   15. 33/5   17. 551.25   19. $\frac{1}{\sqrt{3}}(79°\,6'\,23'')$

(II) 1. $\frac{14}{3}$ 3. $\frac{52}{3}$ 5. 4/3   7. 20   9. 81/4   11. $\frac{a^2}{4}$

13. 1/6   15. 20   17. 8.1023   19. 0.1386

(III) 1. 75/2   3. 64/3   5. $\frac{54}{4}+9\pi$ 7. 1.0986   9. 22/3

11. $a^2(e-e^{-1})$

(IV) 1. 4   3. $-\frac{8}{\pi}$ 5. 0   7. $\frac{\pi^2-4}{27}$ 9. -1.8856

(V) 1. $\frac{3\pi a^2}{8}$ 3. 3π 5. 0.024

EJERCICIO XXIII

(I) 1. 23.7   3. 172. 1131   5. 3.6824   7. 0.8887π 9. 0.6091π

(II) 1. 2.736   3. 19.85   5. 35.68   7. 0.562   9. 0.682

EJERCICIO XXIV

(I) 1. 16/3 5. 6.2383 9. 2.7 13. 64/15

3. 2π 7. 6π 11. 25.619. 15. 64.8

(II) 1. 4/3 (si $p=1$) 5. 1.0735 (si $a=1$) 9. 10 2/3 13. 9

3. $\sqrt{3}$ 7. 4 11. 37 1/3

(III) 1. 4 2. $\frac{2}{\pi-2}$ 6. $\frac{32-3\pi}{3\pi}$

(IV) 1. 12.07 5. 15 3/4

EJERCICIO XXV

(I) 1. c) $\frac{3}{8}\pi$ d) $\frac{9}{2}\pi$ e) 4 f) $\frac{\pi a^2}{4}$ g) $\frac{3}{4}\pi$ h) $\frac{9}{2}\pi$

2. $0.866a^2$

3. $\frac{8}{3}a^2$

6. $\frac{a^2\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{2}$

9. a) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\pi+3-3\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{\pi}{2}-1$ d) $\frac{5}{4}\pi$

f) $\frac{\pi+9-3\sqrt{3}}{2}$ g) $\frac{\pi}{3}+2-\sqrt{3}$ h) $\frac{5\pi}{4}-2$

(IV) 1. 4 3. $6\pi^3 a^2$ 9. $\dfrac{4\pi a^2 b}{3}$

EJERCICIO XXVI

(I) 1. $\dfrac{128}{7}\pi$ 3. $\dfrac{\pi^2}{4}$ 5. $\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{e^{10}}\right)$

(II) 1. 2π 3. $\dfrac{64}{5}\pi$ 7. $\dfrac{4\pi a^2 b}{5}$

(III) 1. $\dfrac{16}{15}\pi$ 3. $\dfrac{8}{15}\pi\sqrt{2}$ 5. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{15}$ 7. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{60}$

EJERCICIO XXVII

(I) 1. a) $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{16\pi}{3}$ c) $\dfrac{128}{3}$ d) $\dfrac{32}{3}$

3. $\dfrac{250}{3}$

10. a) $\dfrac{4r^2\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{4}{3}r^3$ c) $\dfrac{8}{3}\pi^3$ d) $\dfrac{8}{3}r^3$ e) $10\pi r^2$

12. $\dfrac{2a^3(3\pi+8)}{3}$

14. a) $\dfrac{1024}{3}$ b) 535.9

16. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3$

(II) 1. $\dfrac{2}{9}\pi$ 3. $\dfrac{\pi}{4}$ 5. $\dfrac{14\pi}{2}a^3$

EJERCICIO XXVIII

(I) 3. (12/5, 3/2) 5. (16/15, 64/21)

(II) 1. (1, 1) 3. $\left(\frac{5}{3}a, 0\right)$ 6. $(30^\circ, 45^\circ)$

10. $\left(\frac{4p}{5m^2}, \frac{p}{m}\right)$

24. a) $\bar{x} = \frac{3}{8}r$ b) $\bar{x} = \frac{2}{3}h$

(III) 1. a) $\frac{21}{44}$

EJERCICIO XXIX

(I) 1. 36ω 3. $\frac{250}{3}\omega$ 5. 36ω

(II) 1. 112.5 libras 7. 3182 kg 13. $\frac{16}{3}\omega$ kg

3. 967.2 libras 9. 101 000 kg 15. a) 24 000 kg b) 4m

5. 1800 kg 11. 986 630.6 libras

EJERCICIO XXX

(I) 4. 2995.2π kgm 7. *a*) 5 000 000 π kg m